6.4 Exercices corrigés

6.4.1 Exercice 1

On étudie le système de la barre couplée à la masse ponctuelle, en régime forcé en tenant compte de l'amortissement. La force sinusoïdale $F(t)$: $F_0 \cos \omega t$, est appliquée perpendiculairement à l'extrémité de barre (voir figure 6.2) avec : $M = 9\,m$ et $K = k_1$.

1. Établir les équations différentielles du mouvement pour les coordonnées $x_1(t)$ et $x_2(t)$, où $x_2(t) = l\,\theta/2$. En déduire les réponses $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en régime permanent.
2. Quelle pulsation ω faut-il choisir pour arrêter le mouvement de la barre. En déduire l'amplitude X_1 de vibration de la masse m.
3. Dans le cas où l'amortissement est négligé, déterminer la (les) pulsations de résonances.

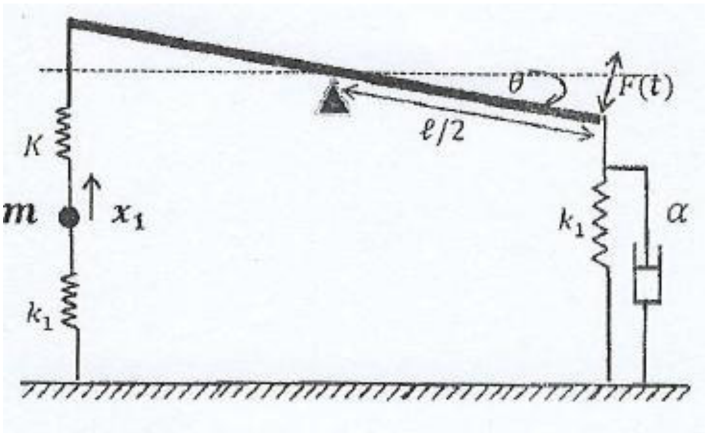

FIGURE 6.3 –

Solution

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{M}{3} \dot{x}_2^2$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k_1\left(x_1^2 + x_1^2\right) + \frac{1}{2}k\left(x_2 + x_1\right)^2$$

Énergie de dissipation

$$D = \frac{1}{2}c\,\dot{x}_2^2$$

Le travail :

$$W = F\frac{l}{2}\theta = F\,x$$

D'où les équations de mouvement :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2k_1x_1 - k_1x_2 = 0 \\ \frac{M}{3}\ddot{x}_2 + 2k_1x_2 - k_1x_1 + c\,\dot{x}_2 = F \end{cases}$$

En régime permanent et en notation complexe, les solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} x_1(t) = \underline{A}_1\,e^{j\,(\omega\,t+\phi_1)} \\ x_2(t) = \underline{A}_2\,e^{j\,(\omega\,t+\phi_2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(2\,\Omega^2\ -\ \omega^2\right)\ x_1 - \Omega^2\,x_2\ = 0 \\ -\Omega^2\,x_1 + \left(2\,\Omega^2\ - 3\,\omega^2 + j\,\omega\,\frac{c}{m}\right)x_2\ = \frac{F}{m} \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} (2\,\Omega^2\ -\ \omega^2) & \Omega^2 \\ -\Omega^2 & 2\,\Omega^2\ - 3\,\omega^2 + j\,\omega\,\frac{c}{m} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F}{m} \end{pmatrix}$$

Les réponses x_1 et x_2 sont données par :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \Omega^2 \\ \frac{F}{m} & 2\,\Omega^2\ - 3\,\omega^2 + j\,\omega\,\frac{c}{m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (2\,\Omega^2\ -\ \omega^2) & \Omega^2 \\ -\Omega^2 & 2\,\Omega^2\ - 3\,\omega^2 + j\,\omega\,\frac{c}{m} \end{vmatrix}}$$

$$x_1 = \frac{F\,\Omega^2}{m\left[-\Omega^4 + (2\,\Omega^2\ -\ \omega^2)\left(2\,\Omega^2\ - 3\,\omega^2 + j\,\omega\,\frac{c}{m}\right)\right]}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} (2\,\Omega^2\ -\ \omega^2) & 0 \\ -\Omega^2 & \frac{F}{m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (2\,\Omega^2\ -\ \omega^2) & \Omega^2 \\ -\Omega^2 & 2\,\Omega^2\ -3\,\omega^2 + j\,\omega\,\frac{c}{m} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{F\ (2\,\Omega^2\ -\ \omega^2)}{m\left[-\Omega^4 + (2\,\Omega^2\ -\ \omega^2)\left(2\,\Omega^2\ -3\,\omega^2 + j\,\omega\,\frac{c}{m}\right)\right]}$$

Pour arrêter le mouvement de la barre il faut que $x_2 = 0$, d'où il suffit que :

$$2\,\Omega^2\ -\ \omega^2 = 0\ \Rightarrow\ \omega = \sqrt{2}\,\Omega$$

Dans ce cas l'amplitude des vibrations de la masse est :

$$X_1 = \frac{F}{m\,\Omega^2}$$

Dans le cas où l'amortissement est négligé (c=0), les pulsations de résonances correspondent au maximum des amplitudes X_1 et X_2 qui a lieu lorsque le dénominateur des amplitudes est nul.

$$Det = 3\,\omega^4 - 8\,\Omega^2\,\omega^2 +\ 3\Omega^4 = 0$$

D'où les pulsation de résonance sont données par :

$$\begin{cases} \omega_{01} = 0.451\,\Omega \\ \omega_{02} = 2.215\,\Omega \end{cases}$$