5.6.8 Exercice 8

Soit le montage de la figure 5.12. Les 2 cylindres identiques (masse M, rayon R, et moment d'inertie ($J = \frac{MR^2}{2}$) roulent sans glisser sur un support horizontal. Soit θ_1 et θ_2 les angles de rotation de ces 2 cylindres par rapport à leurs positions d'équilibre respectives. Au repos ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) les ressorts sont non déformés.

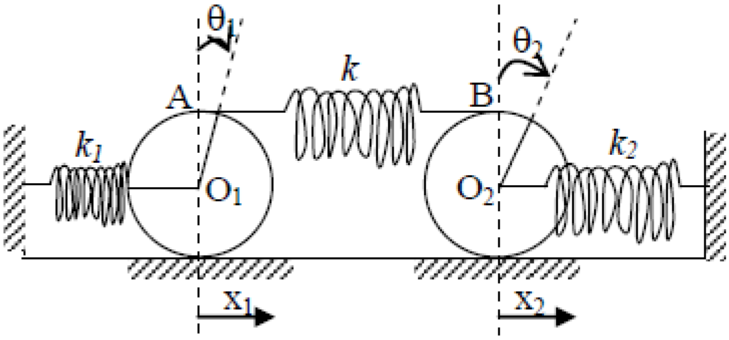

FIGURE 5.12 –

1. On prend $k_1 = k_2 = k' \neq k$, trouver les équations du mouvement en fonction de x_1 et x_2.
2. En déduire les pulsations propres.
3. Déterminer le coefficient de couplage.

Solution

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}M\ \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\ \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}J\ \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J\ \dot{\theta}_2^2$$

On a : $x_1 = R\theta_1$ et $x_2 = R\theta_2$, d'où :

$$T = \frac{3}{4}M\ \left(\dot{x}_1^2 +\ \dot{x}_2^2\right)$$

Énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}k_1\ x_1^2 + \frac{1}{2}k_2\ x_2^2 + \frac{1}{2}k\ \left[(x_1 + R\theta_1) - (x_2 + R\theta_2)\right]^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1\ x_1^2 + \frac{1}{2}k_2\ x_2^2 + \frac{1}{2}k\ \left[2x_1 - 2x_2\right]^2$$

Sachant que $k_1 = k_2 = k'$

$$U = \frac{1}{2}k'\left[\ x_1^2 +\ x_2^2\right] + \frac{1}{2}k\ \left[2x_1 - 2x_2\right]^2$$

Les équations de mouvements sont données par :

$$\begin{cases} \frac{3}{2}M\,\ddot{x}_1 + (k' + 4k)\,x_1 - 4k\,x_2 = 0 \\ \frac{3}{2}M\,\ddot{x}_2 + (k' + 4k)\,x_2 - 4k\,x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{2(k'+4k)}{3M}x_1 - \frac{8k}{3M}\,x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{2(k'+4k)}{3M}x_2 - \frac{8k}{3M}\,x_1 = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} \underline{x}_1 = A_1\,e^{j\,\omega_0\,t} \\ \underline{x}_2 = A_{12}\,e^{j\,\omega_0\,t} \end{cases}$$

En remplaçant dans le système d'équations différentielles , on obtient :

$$\begin{cases} -\omega_0^2\,x_1 + \frac{2(k'+4k)}{3M}x_1 - \frac{8k}{3M}\,x_2 = 0 \\ -\omega_0^2\ \ddot{x}_2 + \frac{2(k'+4k)}{3M}x_2 - \frac{8k}{3M}\,x_1 = 0 \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -\omega_0^2\ + \frac{2(k'+4k)}{3M} & -\frac{8k}{3M} \\ -\frac{8k}{3M} & -\omega_0^2\ + \frac{2(k'+4k)}{3M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} -\omega_0^2\ + \Omega_1^2 & -\Omega_{12}^2 \\ -\Omega_{21}^2 & -\omega_0^2\ + \Omega_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\Omega_1^2 = \Omega_2^2 = \frac{2\,(k' + 4k)}{3M}\,;et\ \Omega_{12}^2 = \Omega_{21}^2 = \frac{8k}{3M}$$

Pour déterminer les pulsation propres, il suffit de calculer le déterminant de la matrice. le déterminant de la matrice étant un polynôme, leur solutions représentent les pulsations propres. en réalité les pulsations propres sont les valeurs propres de la matrice.

$$Det = \left[-\omega_0^2 + \frac{2\,(k' + 4k)}{3M}\right]^2 - \left[\frac{8k}{3M}\right]^2 = \left[-\omega_0^2 + \frac{2\,(k' + 8k)}{3M}\right]\left[-\omega_0^2 + \frac{2k'}{3M}\right]$$

Ou :

$$Det = \left(-\omega_0^2 + \Omega_1^2\right)^2 - \Omega_{12}^2\Omega_{12}^2 = 0$$

D'où :

$$\begin{cases} \omega_{01}^2 = \frac{2(k'+8k)}{3M} \\ \omega_{02}^2 = \frac{2k'}{3M} \end{cases}$$

On peut définir un coefficient de couplage (ou interaction) κ entre les 2 oscillateurs par

$$\kappa = \sqrt{\frac{\Omega_{12}^2\,\Omega_{21}^2}{\Omega_1^2\,\Omega_2^2}} = \sqrt{\frac{\left(\Omega_{12}^2\right)^2}{\left(\Omega_1^2\right)^2}} = \frac{\Omega_{12}^2}{\Omega_1^2} = \frac{\frac{8k}{3M}}{\frac{2(k'+4k)}{3M}} = \frac{4k}{(k' + 4k)}$$