5.6.7 Exercice 7

une barre de longueur l et de masse M reposant en son milieu sur un pivot fixe est couplée à une masse ponctuelle m par l'intermédiaire d'un ressort de raideur K (voir figure 5.11). La masse et la barre sont reliées à un bâti fixe à l'aide de deux ressorts de même raideur k_1. A l'équilibre, la barre est horizontale et les ressorts sont non déformés.

1. Établir les équations différentielles du mouvement de vibrations de faible amplitude. On posera : $x_2 = l\,\theta/2$, $M = 9\,m$ et $K = k_1$.
2. Déterminer les pulsations propres du système ω_{01} et ω_{02} en fonction de $\Omega = \sqrt{k_1/m}$
3. Calculer le rapport d'amplitudes dans le deuxième mode de vibration. En déduire les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dans ce même mode.

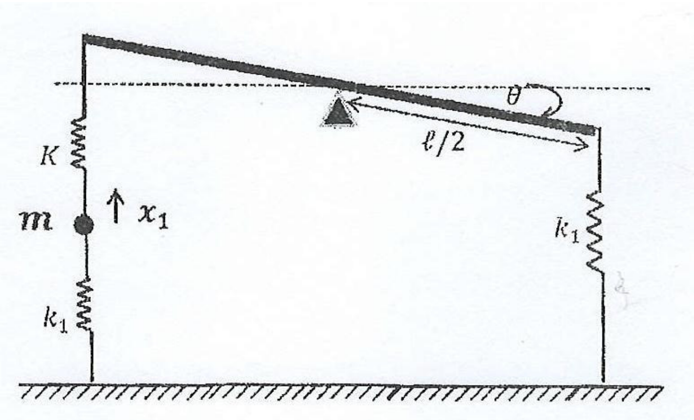

FIGURE 5.11 –

Solution

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{3}\dot{x}_2^2$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k_1\left(x_1^2 + x_1^2\right) + \frac{1}{2}k\left(x_2 + x_1\right)^2$$

Prenant $K = k_1$, les équations différentielles du mouvement pour x_1 et x_2 sont données par les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2k_1x_1 - k_1x_2 = 0 \\ \frac{M}{3}\ddot{x}_2 + 2k_1x_2 - k_1x_1 = 0 \end{cases}$$

Sachant que $M = 9m$ On note : $\Omega = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ et en admettant des solution particulières : $x_i(t) = A_i \cos(\omega\, t + \phi_i)$, ce système devient :

$$\begin{cases} (2\,\Omega^2 - \omega^2)\; x_1 - \Omega^2\, x_2 = 0 \\ -\Omega^2\, x_1 + (2\,\Omega^2 - 3\,\omega^2)\, x_2 = 0 \end{cases}$$

Le système admet une solution si son déterminant est nul :

$$Det = 3\,\omega^4 - 8\,\Omega^2\,\omega^2 + 3\Omega^4 = 0$$

D'où les pulsation propres données par :

$$\begin{cases} \omega_{01} = 0.451\;\Omega \\ \omega_{02} = 2.215\;\Omega \end{cases}$$

Sachant que :

$$\frac{x_1}{x_1} = \frac{(2\,\Omega^2 - \omega^2)}{\Omega^2}$$

Le rapport d'amplitudes complexes dans le $2^e me$ mode est obtenu en remplaçant ω par $\omega_{01} = 0.451\;\Omega$ dans $\frac{x_1}{x_1}$. Le rapport R est donné donc par : $R = -0.215$.

D'où les solutions dans ce mode :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{12}\cos(\omega_{02}\,t + \phi_2) \\ x_2(t) = -0.215\,A_{12}\cos(\omega_{02}\,t + \phi_2) \end{cases}$$