5.6.4 Exercice 4

Pour le système de l'exercice 2 calculer les fréquences propres et les modes propres.

Correction de l'exercice 4

$$\begin{vmatrix} -\omega_0^2\, m \;+\; 2\,k & -\frac{kL}{4} \\ -\frac{kL}{4} & -\frac{mL^2}{12}\,\omega_0^2 \;+\; \frac{5\,k\,L^2}{16} \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{12} m^2\, L^2\, \omega_0^4 \;-\; \frac{46}{96} mkL^2\omega_0^2 \;+\; \frac{9}{16} k^2 L^2 = 0$$

Multipliant par $12/(m^2\, L^2)$ et on note :$\Omega = k/m$ et $\lambda = \omega_0^2$:

$$\lambda^2 \;-\; \frac{23}{4}\,\Omega\,\lambda \;+\; \frac{27}{4}\,\Omega \;=\; 0$$

$$\lambda \;=\; \left(\frac{\frac{23}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{23}{4}\right)^2 \;-\; 4\,\left(\frac{27}{4}\right)}}{2} \right) \Omega \;=\; \begin{cases} \lambda_1 \;=\; 1.64\,\Omega \\ \lambda_2 \;=\; 4.11\,\Omega \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \omega_{01} \;=\; 1.28\,\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_{02} \;=\; 2.04\,\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

Calcul des modes propres :

$$A_{21} \;=\; \frac{m\,\omega_{01}^2 \;-\; 2k}{-k\frac{L}{4}}\,A_{11} \;=\; \frac{m\;1.64\frac{k}{m} \;-\; 2k}{-k\frac{L}{4}} = \frac{1.42}{L}\,A_{11}$$

$$A_{22} \;=\; \frac{m\,\omega_{02}^2 \;-\; 2k}{-k\frac{L}{4}}\,A_{12} \;=\; \frac{m\;4.11\frac{k}{m} \;-\; 2k}{-k\frac{L}{4}} = -\frac{8.42}{L}\,A_{12}$$

$$V_1 \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1.42}{L} \end{pmatrix} \qquad V_1 \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{8.42}{L} \end{pmatrix}$$