5.6.3 Exercice 3

Considérons le système à deux degrés de liberté illustré à la figure 6.8. Déterminez (a) les fréquences propres, (b) les modes, et (c) les nœuds du système.

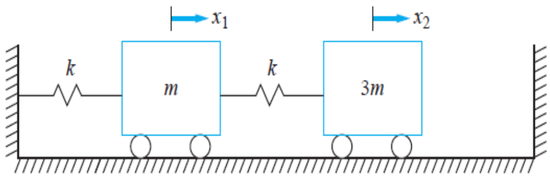

FIGURE 5.8 –

Correction de l'exercice 3

Les équations différentielles régissant le système sont :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3\,m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\,k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calcul des fréquences propres :

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2\,k & -k \\ -k & -m\omega^2 + k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3\,m)\ \omega^4 - (7\,m\,k)\ \omega^2 + k^2 = 0$$

On pose : $\Omega = k/m$ et $\lambda = \omega^2$. en divisant par m on aura :

$$3\,\lambda^2 - 7\,\Omega\,\lambda + \Omega^2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{7\,\Omega - \sqrt{49\Omega^2 - 12\,\Omega^2}}{6} = \frac{7-\sqrt{37}}{6}\,\Omega \\ \lambda_2 = \dfrac{7\,\Omega + \sqrt{49\Omega^2 - 12\,\Omega^2}}{6} = \dfrac{7+\sqrt{37}}{6}\,\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{01} = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{7-\sqrt{37}}{6}}\sqrt{\frac{k}{m}} = 0.391\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_{02} = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1.47\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

Calcul des modes propres :

$$A_{21} = \frac{-m\,\omega_{01}^2 + 2k}{k} A_{11} = \frac{-m\,(0.391)^2\,\dfrac{k}{m} + 2k}{k} = 1.85\,A_{11}$$

$$A_{22} = \frac{-m\,\omega_{02}^2 + 2k}{k} A_{12} = \frac{-m\,(1.47)^2\,\dfrac{k}{m} + 2k}{k} = -0.161\,A_{12}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.85 \end{pmatrix} \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.161 \end{pmatrix}$$

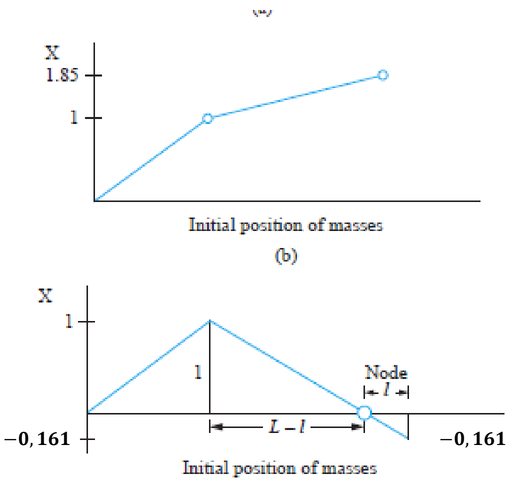

FIGURE 5.9 –

$$\frac{l}{0.161} = \frac{L-l}{1} \Rightarrow l = 0.386\,L$$