5.6.2 Exercice 2

Prenons le système illustré à la figure 5.7, dans lequel la tige de masse m et de moment d'inertie $m\,L^2/12$ est attachée à des ressorts de raideur k aux point A et B.

Établir les équations différentielles pour le système de la figure 5.7 en uti-

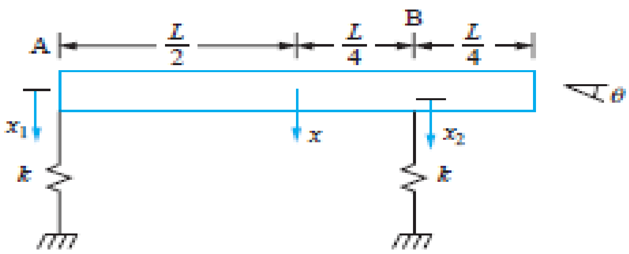

FIGURE 5.7 –

lisant x en coordonnées généralisées : le déplacement du centre de masse du bar par rapport à l'équilibre et θ correspond au déplacement angulaire dans le sens des aiguilles d'une montre.

Correction de l'exercice 2

Énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m\,L^2}{12}\right)\dot{\theta}^2$$

Energie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}\,k\left(x - \frac{L}{2}\theta\right)^2 + \frac{1}{2}\,k\left(x + \frac{L}{4}\theta\right)^2$$

Equation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\,T}{\partial\,\dot{q}_i}\right) + \frac{\partial\,U}{\partial\,q_i} + \frac{\partial\,D}{\partial\,\dot{q}_i} = \frac{\partial\,W}{\partial\,q_i}$$

Sous forme matricielle :

	$q_1 = x$	$q_2 = \theta$
$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$	$m\,\dot{x}$	$\frac{m\,L^2}{12}\,\dot{\theta}$
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)$	$m\,\ddot{x}$	$\frac{m\,L^2}{12}\,\ddot{\theta}$
$\frac{\partial U}{\partial q_i}$	$k\,\left(x\,-\,\frac{L}{2}\theta\right)\,+k\,\left(x\,+\,\frac{L}{4}\theta\right)$	$-\,\frac{L}{2}k\,\left(x\,-\,\frac{L}{2}\theta\right)\,+\frac{L}{4}\,k\,\left(x\,+\,\frac{L}{4}\theta\right)$
$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$	0	0
$\frac{\partial W}{\partial q_i}$	0	0

$$\begin{cases} m\,\ddot{x}\,+k\,\left(x\,-\,\frac{L}{2}\theta\right)\,+k\,\left(x\,+\,\frac{L}{4}\theta\right)\,=0 \\ \frac{m\,L^2}{12}\,\ddot{\theta}\,+-\,\frac{L}{2}k\,\left(x\,-\,\frac{L}{2}\theta\right)\,+\frac{L}{2}\,k\,\left(x\,+\,\frac{L}{4}\theta\right)\,=0 \end{cases} \tag{5.61}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\,k & -\frac{kL}{4} \\ -\frac{kL}{4} & \frac{5\,k\,L^2}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$