6.4.2 Exercice 2

Dans le système oscillant représenté sur la Figure 6.4, le cylindre est homogène, de masse M et de rayon R. Ce cylindre est relié au point A par un ressort de coefficient de raideur K à un bâti B_1 animé d'un mouvement sinusoidale d'amplitudes S_0 et de pulsation ω. Il est également relié par un amortissement de coefficient c à un bâti fixe B_2. Le cylindre roule sans glisser sur un plan horizontal. La tige est sans masse et de longueur l.

L'une de ses extrémités peut osciller sans frotement autour de l'axe du cylindre. Elle porte à l'autre extrimité une masse ponctuelle m qui est reliée à un bâti fixe B_3 par un ressort de coefficient de raideur k.

A l'équilibre la tige est verticale et l'axe du cylindre G est est à l'origine des coordonnées O, on suppose aussi que les ressorts ne sont pas déformés.

La rotation de la tige par rapport à la vertical est repérée par l'angle φ et celle du cylindre par l'angle θ. On considère les oscillations de faibles amplitudes.

On pose : $3M = 2m$, $4K = k = mg/l$, $x_2 = l\,\varphi$ et $x_1 = R\,\theta$.

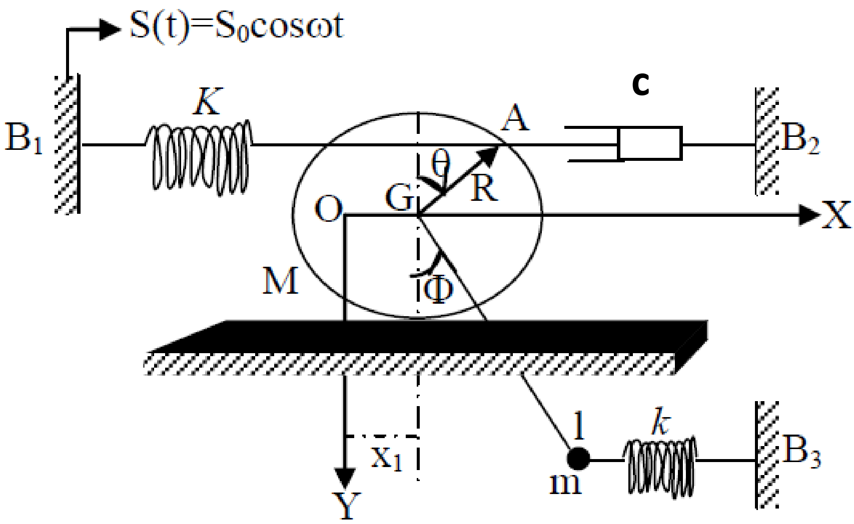

FIGURE 6.4 –

1. Déterminer les équations différentielles en $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Montrer que

le système est équivalent à un système forcé soumis à une force F(t) sinusoïdale dont on précisera l'amplitude F_0.

2. déterminer l'impédance d'entrée du système à la pulsation $\omega = \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Solution

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M + m\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2\right)$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}K\left(2x_1 - s(t)\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(x_1 + x_2\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x_2^2$$

Fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2}c\,\left(2R\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}c\left(4R^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2}c\;4\;\dot{x}_1^2$$

D'où :

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + 4c\dot{x}_1 + 2kx_1 + kx_2 = \frac{k}{2}S(t) \\ m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(4c + 2j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\right)\dot{x}_1 + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\dot{x}_2 = \frac{k}{2}S(t) \\ j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\dot{x}_1 + j\left(m\omega - \frac{2k}{\omega}\right)\dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Pour $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\begin{cases} 4c\dot{x}_1 = \frac{k}{2}S(t) \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{k}{8c}S(t) \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

à cette fréquence la tige reste verticale. L'impédance d'entrée est :

$$Z_e = \frac{F}{\dot{x}_1} = 4c$$