

5.6 Exercice Corrigés

5.6.1 Exercice 1

Établir les équations différentielles régissant le mouvement du système à deux degrés de liberté de la figure 5.6 en utilisant x_1 et x_2 comme coordonnées généralisées. Les deux sont mesurés à partir de position d'équilibre du système.

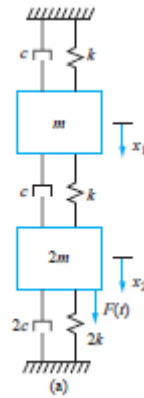


FIGURE 5.6 –

Correction de l'exercice 1

Énergie Cinétique :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} 2 m \dot{x}_2^2$$

Énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} 2k x_2^2$$

Énergie de dissipation :

$$D = \frac{1}{2} c \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} 2c \dot{x}_2^2$$

Travail :

$$W = F(t) \times x_2$$

Équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}$$

	$q_1 = x_1$	$q_2 = x_2$
$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$	$m \dot{x}_1$	$2 m \dot{x}_2$
$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)$	$m \ddot{x}_1$	$2 m \ddot{x}_2$
$\frac{\partial U}{\partial q_i}$	$k x_1 + k (x_1 - x_2)$	$-k (x_1 - x_2) + 2 k x_2$
$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$	$c \dot{x}_1 + c (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$	$-c (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + 2 c \dot{x}_2$
$\frac{\partial W}{\partial q_i}$	0	F

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + k x_1 + k (x_1 - x_2) + c \dot{x}_1 + c (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \\ 2 m \ddot{x}_2 - k (x_1 - x_2) + 2 k x_2 - c (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + 2 c \dot{x}_2 = F \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 c & -c \\ -c & 3 c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 k & -k \\ -k & 3 k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}$$