4.7.9 Exercice 9

Un système constitué d'un disque, homogène, de masse M et de rayon R, peut osciller sans frottement autour de son axe horizontal O. Ce disque est relié à un bâti par un ressort de raideur k, à une distance $R/2$ et d'un amortisseur de coefficient c. Une masse m est fixée au disque à une distance $R/2$ de O et fait un mouvement circulaire avec le mouvement du disque. Cette masse est soumise à une force $F(t) = F_m \cos\omega\, t$. En considérant les oscillations de faibles amplitudes.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement.

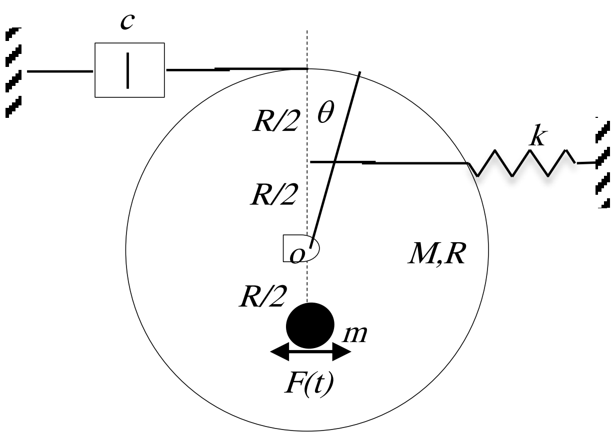

FIGURE 4.22 –

Correction de l'exercice 9

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{4}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{mR^2}{4}\right)\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow M_0 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{mR^2}{4}$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{kR^2}{4}\right)\theta^2 + mg\frac{R}{2}\left(1-\cos\theta\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{kR^2}{4}\right)\theta^2 + mg\frac{R}{2}\left(\frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{kR^2}{4} + mg\frac{R}{2}\right)\theta^2$$

$$\Rightarrow K_0 = \left(\frac{kR^2}{4} + mg\frac{R}{2}\right)$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}cR^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow C_0 = cR^2$$

Travail développé par l'excitation

$$W = F\frac{R}{2}\theta \Rightarrow F_0 = \frac{F\,R}{2}$$

Équation différentielle du mouvement

$$M_0\ddot{\theta} + K_0\theta + C_0\dot{\theta} = F_0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{mR^2}{4}\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{kR^2}{4} + mg\frac{R}{2}\right)\theta + \left(cR^2\right)\dot{\theta} = F\frac{R}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\left(\frac{kR^2}{4} + mg\frac{R}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{mR^2}{4}\right)}\theta + \frac{(cR^2)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{mR^2}{4}\right)}\dot{\theta} = \frac{F\frac{R}{2}}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{mR^2}{4}\right)}$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta + 2\lambda\dot{\theta} = B_0(t)$$

$$\omega_0^2 = \frac{\left(\frac{kR^2}{4} + mg\frac{l}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{mR^2}{4}\right)} \;\; et \;\; \lambda = \frac{(cR^2)}{2\left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{mR^2}{4}\right)}$$