

4.7.8 Exercice 8

Le système mécanique de la figure 4.21, est composé d'un disque homogène (M, R) roule sans glissement sur un plan horizontal, d'une barre AB ($m, 4l$) qui peut osciller autour d'un axe O perpendiculaire au plan du mouvement, d'un ressort k et d'un amortisseur c . La barre horizontale DA est de masse négligeable.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement pour la coordonnée " θ ".

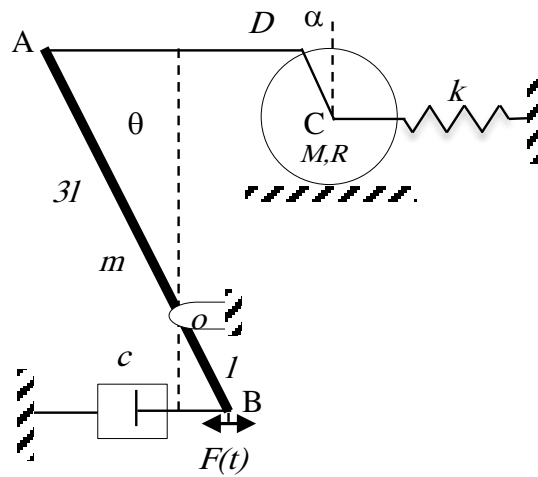


FIGURE 4.21 –

Correction de l'exercice 8

Relation entre θ et α

$$3l\theta = 2R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3l}{2R}\theta$$

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}MR^2 \right) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12}m(4l)^2 + ml^2 \right) \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{27}{8}Ml^2 + \frac{28}{12}ml^2 \right) \dot{\theta}^2 \Rightarrow M_0 = \frac{27}{8}Ml^2 + \frac{28}{12}ml^2$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k(R\alpha)^2 - mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}(kR^2)\alpha^2 - mgl\frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}kR^2 + mgl\right)\theta^2$$

$$\Rightarrow K_0 = \frac{9}{4}kR^2 - mgl$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}cl^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow C_0 = cl^2$$

Le travail développé par l'excitation

$$W = Fl\theta \Rightarrow F_0 = Fl$$

Équation différentielle du mouvement

$$M_0\ddot{\theta} + K_0\theta + C_0\dot{\theta} = F_0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{27}{8}Ml^2 + \frac{28}{12}ml^2\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{9}{4}kR^2 - mgl\right)\theta + (cl^2)\dot{\theta} = Fl$$

De la forme

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta + 2\lambda\dot{\theta} = B_0(t);$$

Avec :

$$\omega_0^2 = \frac{\left(\frac{9}{4}kR^2 - mgl\right)}{\left(\frac{27}{8}Ml^2 + \frac{28}{12}ml^2\right)} \text{ et } \lambda = \frac{(cl^2)}{2\left(\frac{27}{8}Ml^2 + \frac{28}{12}ml^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\left(\frac{9}{4}kR^2 - mgl\right)}{\left(\frac{27}{8}Ml^2 + \frac{28}{12}ml^2\right)}\theta + \frac{(cl^2)}{\left(\frac{27}{8}Ml^2 + \frac{28}{12}ml^2\right)}\dot{\theta} = \frac{Fl}{\left(\frac{27}{8}Ml^2 + \frac{28}{12}ml^2\right)}$$