4.7.7 Exercice 7

Dans le système de la figure 4.20, les deux poulies sont de masses négligeables. Le système est met en oscillations par un moment de couple $M(t) = M_0 \cos(\omega\, t)$ appliqué au disque de rayon R.

1. Déterminer le degré de liberté du système.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement pour la coordonnée θ.
3. Trouver en utilisant la notation complexe la solution permanente de l'équation différentielle du mouvement.
4. Trouver la pulsation de résonance ω_r.

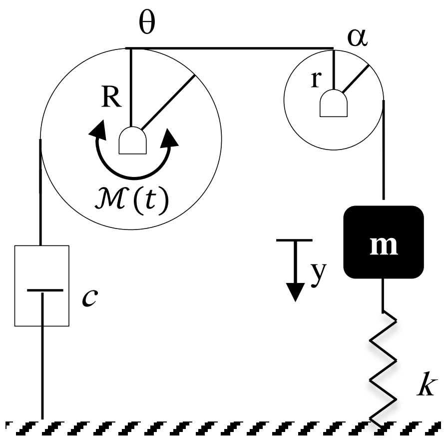

FIGURE 4.20 –

Correction de l'exercice 7

Degré de liberté du système

$$R\theta = r\alpha \;\; et\, r\alpha = y \Rightarrow y = \;\; R\theta$$

$Ddl = 3 - 2 = 1$

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\left(mR^2\right)\dot{\theta}^2 \Rightarrow M_0 = mR^2$$

Énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} k\, y^2 = \frac{1}{2} \left(k\, R^2 \right) \theta^2 \Rightarrow K_0 = k\, R^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2} c\dot{y}^2 = \frac{1}{2} \left(cR^2 \right) \dot{\theta}^2 \Rightarrow C_0 = cR^2$$

Le travail développé par l'excitation

$$W = M(t)\theta \Rightarrow F_0 = M(t)$$

Équation différentielle du mouvement

$$M_0\ddot{\theta} + K_0\theta + C_0\dot{\theta} = F_0 \Leftrightarrow \left(mR^2 \right) \ddot{\theta} + \left(kR^2 \right) \theta + \left(cR^2 \right) \dot{\theta} = M(t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{(kR^2)}{(mR^2)} \theta + \frac{(cR^2)}{(mR^2)} \dot{\theta} = \frac{M(t)}{(mR^2)}$$

De la forme

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta + 2\lambda\dot{\theta} = B_0(t);\ avec\ : \omega_0^2 = \frac{k}{m}\ et\ \lambda = \frac{c}{2m}$$

$$B_0 = \frac{M_0}{mR^2} \cos(\omega t) \to B_0 = B_m\, e^{j(\omega\, t)}\ avec\ : B_m = \frac{M_0}{mR^2}$$

La solution permanente est de la forme :

$$\theta_p = A \cos\left(\omega t - \delta\right) \to \theta_p = Ae^{j(\omega t - \delta)}$$

Avec :

$$\tan\left(\delta\right) = \frac{2\omega\lambda}{\left(-\omega^2 + {\omega_0}^2\right)}$$

$$A\left(\omega\right) = \frac{B_m}{\sqrt{\left[\left(-\omega^2 + {\omega_0}^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2 \right]}}$$

La pulsation de résonance est : $\omega_r = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\lambda^2}$