4.7.4 Exercice 4

Soit le système de la figure 4.17. Un déplacement $S(t) = a\ \cos\left(\omega\ t\right)$ est imposé sur l'extrémité droite du ressort.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement.
2. Trouver en utilisant la notation complexe la solution permanente de l'équation différentielle du mouvement.
3. Trouver la pulsation de résonance.

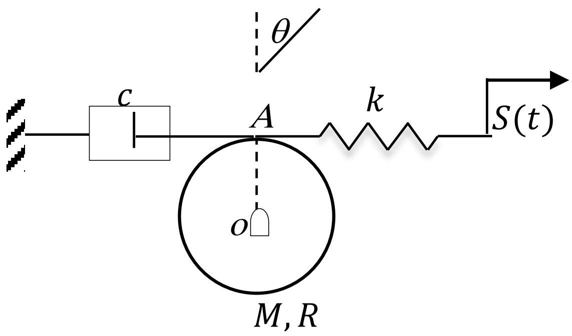

FIGURE 4.17 –

Correction de l'exercice 4

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 \Rightarrow M_0 = \frac{1}{2}MR^2$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k\left(R\theta - s(t)\right)^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta} = k\ R\left(R\theta - s(t)\right)$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}cR^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{\theta}^2} = cR^2$$

Équation différentielle du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)+\frac{\partial U}{\partial \theta}+\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=0$$

$$MR^2\ddot{\theta}+2kR^2\theta+2cR^2\dot{\theta}=2kRs(t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta}+\frac{2kR^2}{MR^2}\theta+\frac{2cR^2}{MR^2}\dot{\theta}=\frac{2kRS_m}{MR^2}\cos(\omega t)$$

De la forme

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta+2\lambda\dot{\theta}=B_0(t)$$

$$B_0=\frac{2kRS_m}{MR^2}\cos(\omega t)=B_m\,e^{j(\omega\,t)}\;avec\;\;:B_m=\frac{2kRS_m}{MR^2}$$

La solution est de la forme :

$$\theta=A\,e^{j\,(\omega\,t-\delta)}$$

Avec :

$$\tan(\delta)=\frac{2\omega\lambda}{(-\omega^2+{\omega_0}^2)}$$

$$A(\omega)=\frac{B_m}{\sqrt{\left[(-\omega^2+{\omega_0}^2)^2+4\lambda^2\omega^2\right]}}$$

La pulsation de résonance est :

$$\omega_r=\sqrt{{\omega_0}^2-2\lambda^2}$$