4.7.3 Exercice 3

Soit un immeuble modélisé par le système physique représenté par une masse m et un ressort de raideur k subit à un mouvement sismique sinusoïdal d'amplitude a de forme $S(t) = a\ \cos(\omega\ t)$.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement.
2. Trouver en utilisant la notation complexe la solution permanente de l'équation différentielle du mouvement.
3. Trouver la pulsation de résonance.

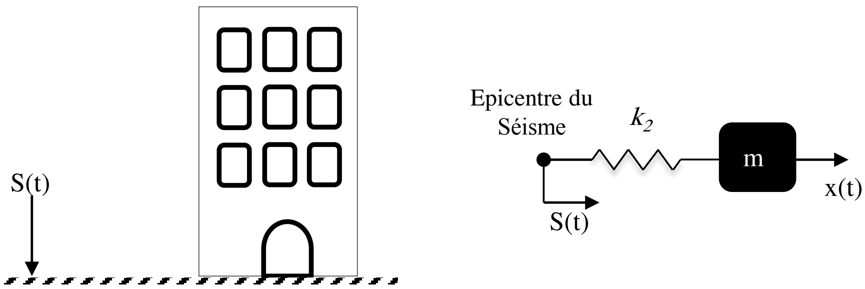

FIGURE 4.16 –

Correction de l'exercice 3

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Rightarrow M_0 = m$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k\,(x - s(t))^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = k\,(x - s(t))$$

Équation différentielle du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = k\,s(t)$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = (k\,a)\cos(\omega t)$$

Il est clair que $(ka)\cos(\omega t)$ représente une force. Le système est donc forcé et l'excitation est harmonique. On suppose que :

$$(ka)\cos(\omega t) = ka\, e^{j(\omega\, t)} \Rightarrow B_0 = \frac{ka}{m} e^{j\omega t}$$

Calculons la 1^{er} et la 2^{eme} dérivée du $q_p(t)$:

$$\begin{cases} \dot{q}_p(t) = j\omega\, A e^{j(\omega\, t - \delta)} = j\omega\; q_p(t) \\ \\ \ddot{q}_p(t) = -\omega^2 A e^{j(\omega\, t-\delta)} = -\omega^2\; q_p(t) \end{cases}$$

Si On remplace dans l'équation différentielle du mouvement on obtient :

$$(-\omega^2 + {\omega_0}^2) A e^{j(\omega t - \delta)} = B_m e^{j\omega t}$$

$$(-\omega^2 + {\omega_0}^2) A^{j(\omega t)} e^{-j(\delta)} = B_m$$

$$(-\omega^2 + {\omega_0}^2) A = B_m\, e^{j(\delta)}$$

Or que :

$$e^{j(\delta)} = \cos(\delta) + j\sin(\delta)$$

D'où :

$$\left(-\omega^2 + {\omega_0}^2\right) A = B_m \cos(\delta) \tag{4.31}$$

$$0 = B_m \sin(\delta) \tag{4.32}$$

$$\tan(\delta) = \frac{0}{(-\omega^2 + {\omega_0}^2)} \Rightarrow \;\delta = 0 \tag{4.33}$$

$$A(\omega) = \frac{B_m}{\sqrt{(-\omega^2 + {\omega_0}^2)^2}}$$

La pulsation de résonance est $\omega_r = \omega_0$