### 4.7.23 Exercice 23*

Le dispositif mécanique de la figure 4.42 est un instrument sismique qui consiste en une masse $(m)$, un ressort $(k)$, un amortisseur $(c)$ et un traceur qui donne le mouvement de la masse $m$ en fonction du temps.
Soit $x(t)$ le mouvement de la masse $m$ et $y(t)$ le mouvement de la base que l'on suppose de la forme $y(t) = Y\ \sin \omega\, t$.

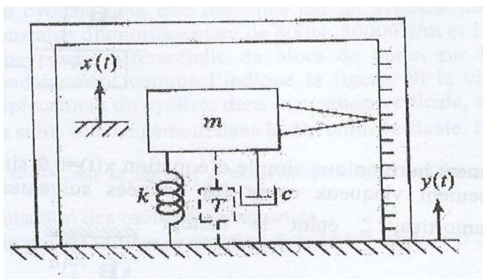


FIGURE 4.42 –

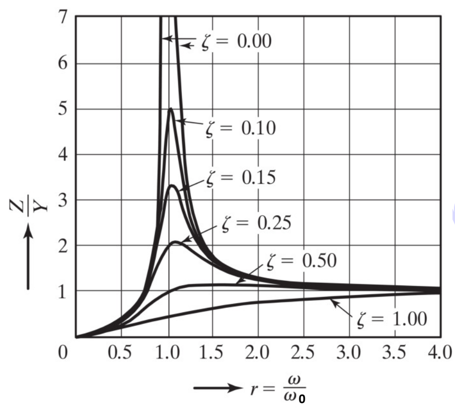


FIGURE 4.43 –

1. Établir, l'équation du mouvement de la masse $m$ en fonction du déplacement relatif $z(t) = x(t) - y(t)$.

2. Déterminer la solution stationnaire $z(t)$. Cette solution est donnée dans la forme $z(t) = Z\ \sin(\omega\, t - \delta)$. La variation $[Z/Y]$ en fonction du rapport des fréquence $r = \frac{\omega}{\omega_0}$ est donnée dans la figure 4.43.

3. Dans le cas d'un ressort de faible raideur, la pulsation propres $\omega_0$ est petite devant la pulsation $\omega$. Écrire dans ce cas $z(t)$, montrer que l'on peut ainsi déterminer l'amplitude $Y$ des vibrations. Ceci est le principe du vibromètre.

4. Dans le cas d'un ressort de raideur élevé, $\omega_0$ est grande devant $\omega$, montrer que l'on peut déterminer ainsi l'accélération des vibrations $\omega^2\, Y$. Ceci est le principe de l'accéléromètre. Dites pour quoi les accéléromètres sont préférés aux vibrations.

**Correction de l'exercice 23**

1.

$$m\,\ddot{x} + k\,(x-y) + c\,(\dot{x}-\dot{y}) = 0$$

On pose

$$z = x - y \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{x} - \ddot{y} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y}$$

$$m\,(\ddot{z}+\ddot{y}) + k\,z + c\,\dot{z} = 0$$

$$m\,\ddot{z} + k\,z + c\,\dot{z} = -m\ddot{y}$$

$$m\,\ddot{z} + k\,z + c\,\dot{z} = m\,\omega^2\,Y\ \sin\omega\,t$$

2.

$$Z = \frac{r^2\,Y}{\sqrt{\left[(1-\ r^2)^2 + 2\,\zeta^2 r^2\right]}}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{c\,\omega}{k - m\,\omega^2}\right)$$

3.

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \Rightarrow \frac{Z}{Y} \approx 1 \Rightarrow Z = Y$$

4.

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \Rightarrow \frac{Z}{Y} \approx r^2 \Rightarrow Z = r^2\ Y$$