4.7.2 Exercice 2

Soit le système de la figure 4.15, $F = F_m \cos(\omega t)$.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement.
2. Trouver en utilisant la notation complexe la solution permanente de l'équation différentielle du mouvement.
3. Trouver la pulsation de résonance.
4. Trouver la puissance moyenne fournie au système.
5. Déduire la puissance maximale fournie au système.
6. Déduire les pulsations de coupures.
7. Déduire la bande passante.
8. Trouver la puissance moyenne dissipée par frottement.

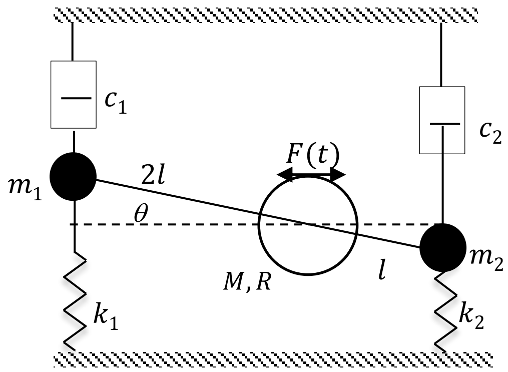

FIGURE 4.15 –

Correction de l'exercice 2

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 4l^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 l^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}MR^2 + m_1 4l^2 + m_2 l^2\right]\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow M_0 = \frac{1}{2}MR^2 + m_1 4l^2 + m_2 l^2$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}\left(4k_1 l^2\right)\theta^2 + \frac{1}{2}\left(k_2 l^2\right)\theta^2 = \frac{1}{2}\left[4k_1 l^2 + k_2 l^2\right]\theta^2$$

$$K_0 = 4k_1 l^2 + k_2 l^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\left(c_1 4l^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(c_2 l^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[c_1 4l^2 + c_2 l^2\right]\dot{\theta}^2$$

$$C_0 = c_1 4l^2 + c_2 l^2$$

Travail des forces d'excitations

$$W = F\,R\theta \Rightarrow F_0 = F\,R$$

Équation différentielle du mouvement

$$M_0\ddot{\theta} + K_0\theta + C_0\dot{\theta} = F_0$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + m_1 4l^2 + m_2 l^2\right)\ddot{\theta} + \left(4k_1 l^2 + k_2 l^2\right)\theta + \left(c_1 4l^2 + c_2 l^2\right)\dot{\theta} = F\,R$$

$$\ddot{\theta} + \frac{(4k_1 l^2 + k_2 l^2)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + m_1 4l^2 + m_2 l^2\right)}\theta + \frac{(c_1 4l^2 + c_2 l^2)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + m_1 4l^2 + m_2 l^2\right)}\dot{\theta} = \frac{F\,R}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + m_1 4l^2 + m_2 l^2\right)}$$

De la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta + 2\lambda\dot{\theta} = B_0$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(4k_1 l^2 + k_2 l^2)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + m_1 4l^2 + m_2 l^2\right)}}$$

et

$$\lambda = \frac{(c_1 4l^2 + c_2 l^2)}{2\left(\frac{1}{2}MR^2 + m_1 4l^2 + m_2 l^2\right)}$$

L'excitation est harmonique

$$F = F_m\, e^{j(\omega\, t)} \Rightarrow B_0 = \frac{F_m}{m} e^{j\omega t}$$

Calculons la 1^{er} et la 2^{eme} dérivées du $q_p(t)$:

$$\begin{cases} \dot{q}_p(t) = j\omega\, A e^{j(\omega\ t-\delta)} = j\omega\ q_p(t) \\ \\ \ddot{q}_p(t) = -\omega^2 A e^{j(\omega\ t-\delta)} = -\omega^2\ q_p(t) \end{cases}$$

Si on remplace dans l'équation différentielle du mouvement on obtient :

$$(-\omega^2 + {\omega_0}^2 + j2\omega\lambda) A e^{j(\omega t-\delta)} = B_m e^{j\omega t}$$

$$(-\omega^2 + {\omega_0}^2 + j2\omega\lambda) A^{j(\omega t)} e^{-j(\delta)} = B_m$$

$$(-\omega^2 + {\omega_0}^2 + j2\omega\lambda) A = B_m\, e^{j(\delta)}$$

Or que :

$$e^{j(\delta)} = \cos(\delta) + j\sin(\delta)$$

D'où :

$$\left(-\omega^2 + {\omega_0}^2\right) A = B_m \cos(\delta) \tag{4.28}$$

$$(2\ \omega\ \lambda)\ A = B_m \sin(\delta) \tag{4.29}$$

En dévissant (4.29) par (4.28) on obtient :

$$\tan(\delta) = \frac{2\ \omega\ \lambda}{(-\omega^2 + {\omega_0}^2)} \tag{4.30}$$

D'autre part :

$$(4.28)^2 + (4.29)^2 \rightarrow \left[\left(-\omega^2 + {\omega_0}^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right] A^2 = {B_m}^2$$

$$A(\omega) = \frac{B_m}{\sqrt{\left[\left(-\omega^2 + {\omega_0}^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right]}}$$

La pulsation de résonance ω_r est obtenue pour :

$$\frac{d}{de} A(\omega)\bigg|_{\omega_r} = 0 \Rightarrow \frac{-2B_m\,\omega\left[(-\omega^2 + \omega_0^2) - 2\lambda^2\right]}{\left[(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right]^{3/2}} = 0$$

$$\Rightarrow -2B_m\,\omega\left[\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right) - 2\lambda^2\right] = 0$$

$$\omega \neq 0 \; donc \; \left(-\omega^2 + \omega_0^2\right) - 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \omega = \omega_r = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\lambda^2}$$

La puissance moyenne fournir au système est :

$$\bar{P} = \frac{\lambda {F_m}^2}{M_0\left[\left(\frac{{\omega_0}^2}{\omega} - \omega\right)^2 + 4\lambda^2\right]}$$

La puissance maximale fournie au système est obtenue pour :

$$\frac{d}{de}\overline{P}(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$$

D'où :

$$\bar{P}_{max} = \frac{F_m^2}{4\,M_0\,\lambda}$$

La bande passante (on suppose que $\lambda << \omega_0$).
On a : $\omega_1 = \omega_0 - \lambda$ et $\omega_2 = \omega_0 + \lambda$.
D'où :

$$B_p = \omega_2 - \omega_1 = 2\lambda$$

La puissance moyenne dissipée par frottement

$$\overline{P}_r = \frac{1}{T}\int_0^T F_c \dot{y}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T (c\,\dot{y})\,\dot{y}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T c\,\dot{y}^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T c\,(-\omega\, A\, \sin(\omega t - \delta))^2 dt$$

$$\text{or que : } \sin^2(\omega t - \delta) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos 2\,(\omega t - \delta)\right]$$

$$\overline{P}_r = \frac{c}{2T}\int_0^T A^2\omega^2\left[1 - \cos 2\,(\omega t - \delta)\right] dt = \frac{1}{2}\left[\frac{c\omega^2\left(\frac{F_m}{M_0}\right)^2}{\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}\right]$$