### 4.7.13 Exercice 13

Un système constitué d'un disque, homogène, de masse $M$ et de rayon $R$, peut rouler sans glisser sur un plan horizontal. Ce disque est relié à un bâti par un ressort de raideur $k$, au point $O$ et d'un amortisseur de coefficient $c$ au point A tel que $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \frac{R}{2}$. Une masse $m = M/2$ est fixée au disque au point G à une distance $\left|\overrightarrow{OG}\right| = a \times R$ tel que $0 < a < 1$. Cette masse est soumise à une force $F(t) = F\cos(\omega\, t)$.
En considérant les cas des oscillations de faibles amplitudes :

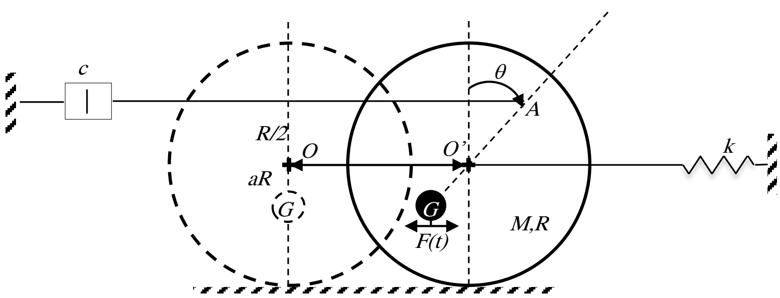


FIGURE 4.27 –



1. Montrer que l'équation différentielle du mouvement du système est de la forme :

$$\left[\left(6+2(1-a)^2\right) M\right]\ \ddot{\theta} + \left[\frac{4\,k\,R + 2M\,g\,a}{R}\right]\ \theta + [9\,c]\ \dot{\theta}\ =\ \frac{4F(t)\,(1-a)}{R}$$

2. On considère le cas d'un amortissement critique, déterminer la valeur de $k$ pour laquelle la puissance moyenne fournie au système est nulle.
On donne :
- M=500 Kg, R=1m.
- A l'instant t=0 :$\theta = 0\,rd$ et $V(0) = 10\,rd/s$.
- A l'instant $t = t_1$ : $\theta(t_1) = \theta_{max} = 0.5\,rd$ et $V(t_1) = 0\,rd/s$.

### Correction de l'exercice 13

Etablir l'équation différentielle du mouvement.

Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{3M\,R^2}{2}\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{M}{2}(1-a)^2\,R^2\right]\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3+(1-a)^2}{2}\right)MR^2\right]\dot{\theta}^2$$

Energie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}\left[k\,R^2\right]\theta^2 + \frac{M}{2}gaR(1-\cos\,\theta) = \frac{1}{2}\left[\frac{2k\,R^2+MgaR}{2}\right]\theta^2$$

Fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2}\left[\frac{9c}{4}R^2\right]\dot{\theta}^2$$

Le Travail :

$$W = F(t)\,(1-a)\,R\,\theta$$

Equation différentielle du mouvement après simplification

$$\left[\left(6+2(1-a)^2\right)M\right]\,\ddot{\theta} \;+\; \left[\frac{4\,k\,R+2M\,g\,a}{R}\right]\,\theta \;+\; [9\,c]\,\dot{\theta} \;=\; \frac{4F(t)\,(1-a)}{R}$$

La puissance moyenne fournie au système est nulle : $\Rightarrow\ a = 1$

$$\begin{cases} \theta\,(t) = (A_1\,t\,+A_2)\,e^{-\lambda\,t} \\ \dot{\theta}\,(t) = A_1\,t\,e^{-\lambda\,t} = A_1\,e^{-\lambda\,t}\,(1-\lambda\,t\,) \end{cases}$$

$$t = 0\ \Rightarrow\ \begin{cases} \theta\,(0) = A_2 = 0 \\ \dot{\theta}\,(0) = A_1 = 10 \end{cases}$$

$$t = t_1\ \Rightarrow\ \begin{cases} \dot{\theta}\,(t_1) = 10\,e^{-\lambda\,t_1}\,(1-\lambda\,t_1\,) = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\lambda} \\ \theta\,(t_1) = 10\,t_1\,e^{-\lambda\,t_1} = 10\,\frac{1}{\lambda}\,e^{-\lambda\frac{1}{\lambda}} = 0.5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{20}{e} = 7.35\ \Rightarrow\ \frac{9c}{12M} = \frac{20}{e} \Rightarrow c = \frac{240M}{9\,e}$$

$$\omega_0^2 = \lambda^2 \Rightarrow \frac{4\;k\;R+2M\,g}{6MR} = \left(\frac{20}{e}\right)^2 \Rightarrow k = 38045\ \text{N/m}$$