4.7.11 Exercice 11

La figure 4.24 schématise une voiture de masse m dont le système suspension est représenté par un amortisseur de coefficient de frottement c et un ressort k. Les roues sont de masse négligeable devant m. Cette voiture se déplace dans la direction ox suivant une route ondulée dont le profil est supposé sinusoïdal : $y_1 \sin(2\pi x/\varsigma)$, à vitesse V constante. La voiture se déplace suivant ox et sa position vertical est repérée par la variable $y(t)$. On suppose qu'il n'y a pas de mouvement latéral (suivant l'axe oz).

1. Établir l'équation différentielle qui régit les variations de la coordonnée y au cours du temps. En déduire l'amplitude Y du mouvement.

http://ch-rahmani.univ-boumerdes.dz/

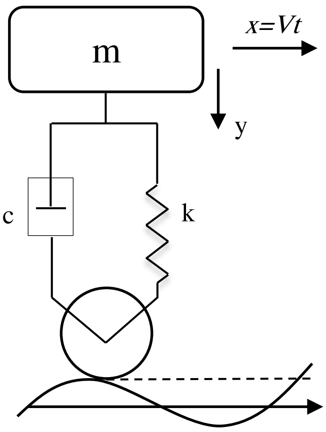

FIGURE 4.24 –

Correction de l'exercice 11

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$$

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k(y - y_1)^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = k\,(y - y_1)$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}c(\dot{y} - \dot{y}_1)^2 \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = c\left(\dot{y} - \dot{y}_1\right)$$

Equation différentielle du mouvement

$$m\ddot{y} + k\left(y - y_1\right) + c\left(\dot{y} - \dot{y}_1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{y} + ky - ky_1 + c\dot{y} - c\dot{y}_1 = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y - \frac{k}{m}y_1 + \frac{c}{m}\dot{y} - \frac{c}{m}\dot{y}_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}y + \frac{c}{m}\dot{y} = \frac{k}{m}y_1 + \frac{c}{m}\dot{y}_1$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\lambda\dot{y} = \omega_0^2 y_1 + 2\lambda\dot{y}_1$$

Le second membre

$$B_0 = \omega_0^2 y_1 + 2\lambda\dot{y}_1$$

peut se mettre (après avoir remplacé y_1 et sa dérivée par leurs valeurs) sous la forme :

$$B_0 = B_m \cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

Démonstration :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\lambda\dot{y} = \omega_0^2 y_1 + 2\lambda\dot{y}_1$$

On a :

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = 2\pi\frac{Vt}{\lambda} = \omega t$$

$$\Rightarrow y_1 = Y_1 \sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) = Y_1 \sin\omega t, \text{d'où: } \dot{y}_1 = \omega Y_1 \cos\left(t\right)$$

http://ch-rahmoune.univ-boumerdes.dz/

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\lambda\dot{y} = \omega_0^2 \mathrm{Y}_1 \sin(\omega t) + 2\lambda\omega \mathrm{Y}_1 \cos(t)$$

$$B_0 = \omega_0^2 \mathrm{Y}_1 \sin(\omega t) + 2\lambda\omega \mathrm{Y}_1 \cos(\omega t) = \mathrm{Y}_1 \left(\omega_0^2 \sin(\omega t) + 2\lambda\omega \cos(\omega t)\right)$$

$$B_0 = B_{m1} sin(\omega t) + B_{m2} \cos(\omega t)\,; avec\ B_{m1} = \omega_0^2 \mathrm{Y}_1 \quad et\ B_{m2} = 2\lambda\omega \mathrm{Y}_1$$

$$B_0 = \sqrt{B_{m1}^2 + B_{m1}^2} \cos(\omega t + \varphi) = \sqrt{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}\mathrm{Y}_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$B_0 = B_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Où :

$$\varphi = a\tan\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2}\ et\ B_m = \sqrt{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}\mathrm{Y}_1$$

La solution permanente est donc de la forme $y = cos(\omega\, t - \delta)$.

Avec :

$$Y = \frac{B_m}{\sqrt{\left(\omega_0^4 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}{\left(\omega_0^4 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}Y_1$$

En utilisant une application numérique on constate que l'amortisseur diminue l'amplitude de la réponse

http://ch-rahmoune.univ-boumerdes.dz/