4.7.10 Exercice 10

La figure 4.23(a) représente une machine à laver constituée essentiellement d'une partie tournante (tambour) posée sur des supports anti vibrations représentés sur la figure par un ressort et un amortisseur. Le tambour a un rayon r et tourne avec une vitesse angulaire ω. Le tambour fait tourner le linge représenté par la masse m. Pour simplifier le problème on suppose que les mouvements de la machines à laver sont verticaux et représentés par la variable y. La masse de la machine est M.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement pour la coordonnée y.
2. Montrer qu'un tel dispositif est équivalent au schéma de la figure 4.23(b). Donner l'expression de la force équivalente $F(t)$.

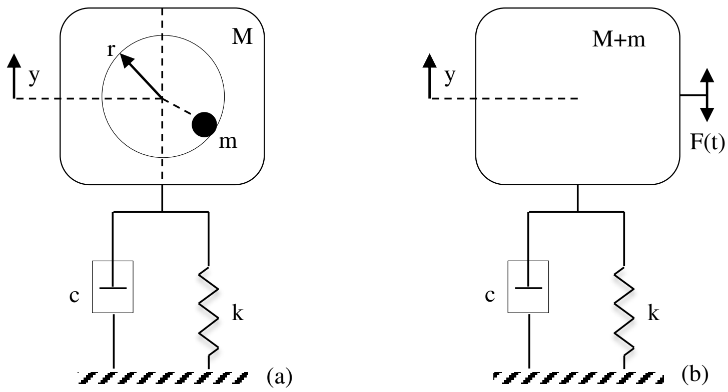

FIGURE 4.23 –

Correction de l'exercice 10

$$\begin{cases} x_m = r\sin\theta \\ y_m = y - r\cos\theta \end{cases}$$

D'où la vitesse :

$$\begin{cases} \dot{x}_m = r\dot{\theta}\cos\theta \\ y_m = \dot{y} - r\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow V_m^2 = \left[\left(r\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(\dot{y} - r\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right]$$

$$\begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_M = 0 \\ \dot{y}_M = \dot{y} \end{cases} \Rightarrow V_M^2 = \dot{y}^2$$

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}MV_M^2 + \frac{1}{2}mV_m^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \left(\dot{y} - r\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = M\ddot{y} + m\ddot{y} + mr\dot{\theta}^2\cos\theta;\ \text{sashant que } \theta = \omega\, t\, et\, \dot{\theta} = \omega$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = (M+m)\,\ddot{y} + mr\omega^2\cos(\omega\, t)\,;$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}ky^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = ky$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}c\dot{y}^2 \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = c\dot{y}$$

Équation différentielle du mouvement

$$(M+m)\,\ddot{y} + mr\omega^2\cos(\omega\, t) + ky + c\dot{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (M+m)\,\ddot{y} + ky + c\dot{y} = -mr\omega^2\cos(\omega\, t)$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{(M+m)}y + \frac{c}{(M+m)}\dot{y} = \frac{-mr\omega^2}{(M+m)}\cos(\omega\, t)$$

De la forme :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\lambda\dot{y} = B_0$$

Avec :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{(M+m)};\lambda = \frac{c}{2\,(M+m)}$$

$$F\,(t) = -mr\omega^2\cos(\omega\, t)$$