4.7 Exercices corrigés

4.7.1 Exercice 1

Soit le système de la figure 4.14, $F = F_m\, e^{j(\omega\, t)}$.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2. Trouver en utilisant la notation complexe la solution permanente de l'équation différentielle du mouvement.
3. Trouver la pulsation de résonance ω_r.
4. Trouver la puissance moyenne fournie au système.
5. Déduire la puissance maximale fournie au système.
6. Déduire les pulsations de coupures pour les quelles $P = \frac{\overline{P_{\max}}}{2}$.
7. Déduire la bande passante (on suppose que $\lambda << \omega_0$).
8. Trouver la puissance moyenne dissipée par frottement.

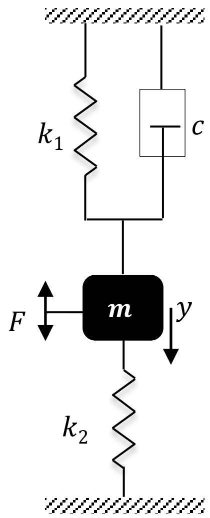

FIGURE 4.14 –

Correction de l'exercice 1

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \Rightarrow M_0 = m$$

$$U = \frac{1}{2}k_1y^2 + \frac{1}{2}k_2(-y)^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\,y^2 \Rightarrow K_0 = k_1 + k_2$$

$$D = \frac{1}{2}c\dot{y}^2 \Rightarrow C_0 = c$$

$$W = F(t)\,y \Rightarrow F_0 = F$$

Équation différentielle du mouvement

$$M_0\ddot{y} + K_0y + C_0\dot{y} = F_0$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{y} + (k_1 + k_2)\,y + c\dot{y} = F$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} + \frac{(k_1 + k_2)}{m}y + \frac{c}{m}\dot{y} = \frac{F}{m}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\lambda\dot{y} = B_0$$

Avec :

$$\omega_0^2 = \frac{(k_1 + k_2)}{m}$$

$$\lambda = \frac{c}{2m}$$

$$B_0 = \frac{F}{m}$$

L'excitation est harmonique :

$$F = F_m\,e^{j(\omega\,t)} \Rightarrow B_0 = \frac{F_m}{m}e^{j\omega t}$$

Calculons la 1^{er} et la 2^{eme} dérivée du $q_p(t)$:

$$\begin{cases} \dot{q}_p(t) = j\omega\,Ae^{j(\omega\,t-\delta)} = j\omega\;q_p(t) \\ \\ \ddot{q}_p(t) = -\omega^2 Ae^{j(\omega\,t-\delta)} = -\omega^2\;q_p(t) \end{cases}$$

Si On remplace dans l'équation différentielle du mouvement on obtient :

$$(-\omega^2 + {\omega_0}^2 + j2\omega\lambda)Ae^{j(\omega t-\delta)} = B_m e^{j\omega t}$$

$$(-\omega^2 + {\omega_0}^2 + j2\omega\lambda)A^{j(\omega t)}e^{-j(\delta)} = B_m$$

$$(-\omega^2 + {\omega_0}^2 + j2\omega\lambda)A = B_m\, e^{j(\delta)}$$

Or que :

$$e^{j(\delta)} = \cos(\delta) + j\sin(\delta)$$

D'où :

$$\left(-\omega^2 + {\omega_0}^2\right)A = B_m \cos(\delta) \tag{4.25}$$

$$(2\ \omega\ \lambda)\ A = B_m \sin(\delta) \tag{4.26}$$

En dévissant (4.26) par (4.25) on obtient :

$$\tan(\delta) = \frac{2\ \omega\ \lambda}{(-\omega^2 + {\omega_0}^2)} \tag{4.27}$$

D'autre part :

$$(4.26)^2 + (5.25)^2 \to \left[\left(-\omega^2 + {\omega_0}^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right]A^2 = {B_m}^2$$

$$A(\omega) = \frac{B_m}{\sqrt{\left[\left(-\omega^2 + {\omega_0}^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right]}}$$

La pulsation de résonance ω_r est obtenue pour :

$$\frac{d}{de}A(\omega)\bigg|_{\omega_r} = 0 \Rightarrow \frac{-2B_m\,\omega\left[(-\omega^2+\omega_0^2) - 2\lambda^2\right]}{\left[(-\omega^2+\omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right]^{3/2}} = 0$$

$$\Rightarrow -2B_m\,\omega\left[\left(-\omega^2+\omega_0^2\right) - 2\lambda^2\right] = 0$$

$$\omega \neq 0 \ donc \ \left(-\omega^2 + \omega_0^2\right) - 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \omega = \omega_r = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\lambda^2}$$

La puissance moyenne fournir au système est :

$$\bar{P} = \frac{\lambda {F_m}^2}{M_0 \left[\left(\frac{{\omega_0}^2}{\omega} - \omega \right)^2 + 4\lambda^2 \right]}$$

La puissance maximale fournie au système est obtenue pour :

$$\frac{d}{de} \overline{P}\,(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$$

D'où :

$$\bar{P}_{max} = \frac{F_m^2}{4\ M_0\ \lambda}$$

.la bande passante (on suppose que $\lambda << \omega_0$).
On a : $\omega_1 = \omega_0 - \lambda$ et $\omega_2 = \omega_0 + \lambda$ D'où :

$$B_p = \omega_2 - \omega_1 = 2\lambda$$

La puissance moyenne dissipée par frottement

$$\overline{P}_r = \frac{1}{T}\int_0^T F_c \dot{y}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T (c\,\dot{y})\,\dot{y}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T c\,\dot{y}^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T c\,(-\omega\, A\, \sin(\omega t - \delta))^2 dt$$

$$\text{or que : } \sin^2(\omega t - \delta) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos 2\,(\omega t - \delta)\right]$$

$$\overline{P}_r = \frac{c}{2T}\int_0^T A^2\omega^2\left[1 - \cos 2\,(\omega t - \delta)\right] dt = \frac{1}{2}\left[\frac{c\omega^2 \left(\frac{F_m}{M_0}\right)^2}{\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}\right]$$