3.3.9 Exercice 9

Soit l'équation différentielle du mouvement suivante :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

1. Soit $x(t) = Ae^{-\beta t}e^{i\omega t}e^{\varphi}$ une solution de cette équation différentielle du mouvement. Déterminer β en fonction de m et c.
2. Sachant que la pseudo période des oscillations est de $\pi/3s$. Déterminer la valeur de c.
   On donne $m = 1\,kg$ et $k = 100N/m$.

Correction de l'exercice 9

1.

$$x(t) = Ae^{-\beta t}e^{j\omega t}e^{\varphi} = A\,e^{[(j\omega-\beta)t+\varphi]}$$

$$\dot{x}(t) = (j\omega-\beta)\,A\,e^{[(j\omega-\beta)t+\varphi]} = (j\omega-\beta)\,x(t)$$

$$\ddot{x}(t) = (j\omega-\beta)^2 A\,e^{[(j\omega-\beta)t+\varphi]} = (j\omega-\beta)^2 x(t)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\,\lambda\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

$$(j\omega-\beta)^2 x(t) + 2\,\lambda\,(j\omega-\beta)\,x(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0$$

$$\left[(j\omega-\beta)^2 + 2\,\lambda\,(j\omega-\beta) + \omega_0^2\right] x(t) = 0$$

$$\Rightarrow (j\omega-\beta)^2 + 2\,\lambda\,(j\omega-\beta) + \omega_0^2 = 0$$

$$-\omega^2 - j\,2\,\beta\,\omega + \beta^2 + j\,2\,\lambda\,\omega - 2\,\lambda\,\beta + \omega_0^2 = 0$$

$$\begin{cases} -\omega^2 \ + \beta^2 - \ 2\,\lambda\,\beta \ + \omega_0^2 \ = \ 0 \\ -j\,2\,\beta\,\omega \ + j\,2\,\lambda\,\omega \ = \ 0 \end{cases}$$

$$-j\,2\,\beta\,\omega \ + j\,2\,\lambda\,\omega \ = \ 0 \Rightarrow j\,2\,\beta\,\omega \ = \ j\,2\,\lambda\,\omega \ = \ 0$$

$$\Rightarrow \beta = \lambda = \frac{c}{2\,m}$$

2.

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \Rightarrow \omega_a^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = \omega_0^2 - \omega_a^2$$

$$\lambda^2 = \omega_0^2 - \omega_a^2 = \frac{k}{m} - \frac{2\,\pi}{T_a} = 10 - 6 = 4 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\lambda = \frac{c}{2m} \Rightarrow \ c = \ 2\,\lambda\,m = \ 4\,N\,s/\,m$$