3.3.7 Exercice 7

Un disque de masse M et de rayon $2\,r$, est relié à sa périphérique à un ressort de raideur k et à un amortisseur c. Une masse m, posée sur un plan incliné, est reliée à la périphérie du disque par un fil. Une autre masse m est suspendue à un fil enroulé autour d'un sillon de rayon r gravé sur la surface du disque. Les fils sont inextensibles et non glissants. Le disque peut tourner librement autour de son axe horizontal fixe.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2. Sachant que $c = 21\ Ns/m$;$k = 7\ N/m$ et $m = M = 1\ kg$; trouver la nature du mouvement.
3. Quelle est la valeur de c qui ne faut pas dépassée pour avoir des oscillations.
4. Si $c = 2\ Ns/m$, calculer le temps au bout duquel l'amplitude est divisée par 5.

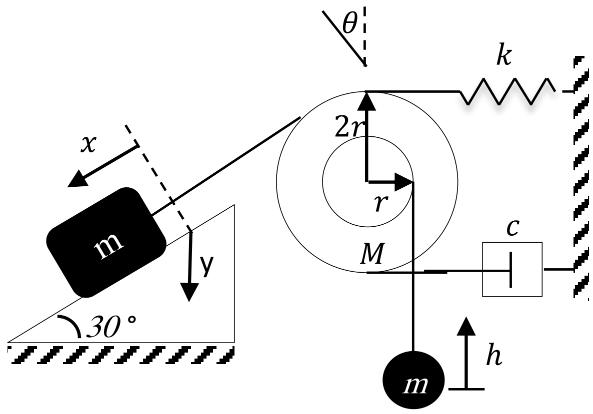

FIGURE 3.12 –

Corrigé de l'exercice 7

1. Equation différentielle du mouvement

$$x = 2\ r\,\theta\ ;\ y = x\sin 30 = r\theta\ ;\ h = r\theta = y$$

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M(2r)^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(2r\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(r\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2Mr^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(4mr^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(mr^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(2Mr^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left[5mr^2 + 2Mr^2\right]\dot{\theta}^2 \Rightarrow M_0 = 5mr^2 + 2Mr^2$$

Énergie potentielle

$$U = -mgy + mgh + \frac{1}{2}k(2r\theta)^2$$

$$U = -mgr\theta + mgr\theta + \frac{1}{2}\left(4kr^2\right)\theta^2 \Rightarrow K_0 = 4kr^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}c\left(2r\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(4cr^2\right)\dot{\theta}^2 \Rightarrow C_0 = 4cr^2$$

Équation différentielle du mouvement

$$M_0\ddot{\theta} + K_0\theta + C_0\dot{\theta} = 0$$

$$\left(5mr^2 + 2Mr^2\right)\ddot{\theta} + \left(4kr^2\right)\theta + \left(4cr^2\right)\dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{(4k)}{(5m + 2M)}\theta + \frac{(4c)}{(5m + 2M)}\dot{\theta} = 0$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{M_0}} = \sqrt{\frac{(4k)}{(5m + 2M)}}$$

$$\lambda = \frac{C_0}{2M_0} = \frac{(4c)}{2\,(5m + 2M)}$$

2. On a : $c = 21\,Ns/m\,;k = 7\,N/m=$ et $m = M = 1\,kg$; trouver la nature du mouvement.

$$\omega_0 = 2 \;\; et\, \lambda = 6 \;\; \Rightarrow \lambda > \omega_0$$

Le mouvement est donc apériodique.

3. La valeur de c qui ne faut pas dépassée pour avoir des oscillations

$$\lambda < \omega_0 \Leftrightarrow \lambda^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \left[\frac{(4c)}{2\,(5m + 2M)}\right]^2 < \frac{(4k)}{(5m + 2M)}$$

$$\left[\frac{(4c)}{14m}\right]^2 < \frac{(4k)}{7m} \Rightarrow \frac{16c^2}{196m} < \frac{4k}{7m} \Rightarrow c < \sqrt{\frac{784km}{16}} = \sqrt{7k\,m}$$

4. $c = 2\,Ns/m$, calculer le temps au bout duquel l'amplitude est divisée par 5.

$$Ce^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{5}Ce^{-\lambda t} \Rightarrow \ln 5 = \lambda\tau \Rightarrow \tau \approx 2.82s$$