3.3.6 Exercice 6

1. Pour le système de la figure 3.11, établir l'équation différentielle du mouvement et déduire la pulsation propre et le facteur d'amortissement.

2. Sachant que $m = 2\ Kg$, $M = 5\ Kg$, $k = 0.4\ N/m$, $R = 50\ cm$, $g = 10\ m/s.$, trouver la valeur maximale que c ne doit pas atteindre pour que le système oscille.

3. Avec une valeur de $c = 20Ns/m$ le système oscille, mais son amplitude diminue au cours du temps. Trouver le temps nécessaire pour que l'amplitude diminue à $1/5$ de sa valeur.

4. L'amortisseur précédent est maintenant remplacé par un autre amortisseur de coefficient c', on remarque alors que l'amplitude diminue de $1/3$ de sa valeur après 24 oscillation complètes. Calculer la valeur de c'.

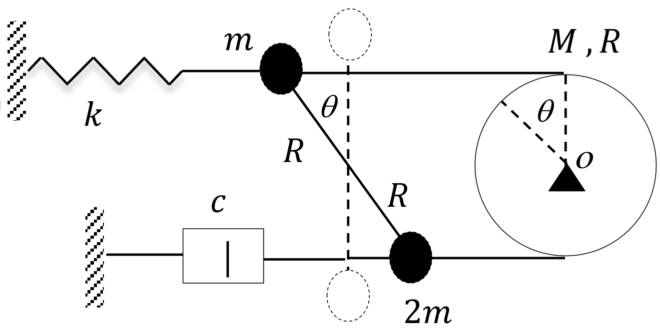

FIGURE 3.11 –

Corrigé de l'exercice 5

1. L'équation différentielle du mouvement ,la pulsation propre et le facteur d'amortissement.

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(mR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(2mR^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + 3mR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M_0\dot{\theta}^2$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + 2mgR\left(1 - \cos\theta\right) - mgR\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + mgR\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + \frac{1}{2}mgR\theta^2 = \frac{1}{2}\left(kR^2 + mgR\right)\theta^2 = \frac{1}{2}K_0\theta^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}cR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(cR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}C_0\dot{\theta}^2$$

Équation différentielle du mouvement

$$M_0\ddot{\theta} + K_0\theta + C_0\dot{\theta} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + 3mR^2\right)\ddot{\theta} + \left(kR^2 + mgR\right)\theta + \left(cR^2\right)\dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\left(kR^2 + mgR\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + 3mR^2\right)}\theta + \frac{\left(cR^2\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + 3mR^2\right)}\dot{\theta} = 0$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{M_0}} = \sqrt{\frac{\left(kR^2 + mgR\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + 3mR^2\right)}} = \sqrt{\frac{2\left(kR + mg\right)}{MR + 6mR}}$$

$$\lambda = \frac{C_0}{2M_0} = \frac{(cR^2)}{2\left(\frac{1}{2}MR^2 + 3mR^2\right)} = \frac{c}{M+6m}$$

2. La valeur maximale que c ne doit pas atteindre pour que le système oscille.

   Pour qu'un système amorti oscille, il faut qu'il soit en régime pseudo périodique, donc

$$\omega_0^2 - \lambda^2 > 0 \Rightarrow \lambda^2 < \omega_0^2$$

$$\left(\frac{c}{M+6m}\right)^2 < \frac{2\,(kR+mg)}{R\,(M+6m)} \Rightarrow c^2 < (M+6m)^2 \frac{2\,(kR+mg)}{R\,(M+6m)}$$

$$\Rightarrow c < \sqrt{\frac{2\,(kR+mg)\,(M+6m)}{R}}; \qquad AN : c < 37N\,s/m$$

3. Le temps nécessaire pour que l'amplitude diminue à 1/5 de sa valeur.

   Le régime est pseudo périodique, l'équation horaire est de la forme :

$$\theta\,(t) = C\,e^{-\lambda t}\cos\left(\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)\,t + \phi\right)$$

   Pour que l'amplitude diminue à 1/5 de sa valeur il faut un temps τ tel que :

$$C\,e^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{5}C\,e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{1}{5} \Rightarrow e^{-\lambda t - \lambda\tau + \lambda t} = \frac{1}{5} \Rightarrow \ln\left(e^{-\lambda\tau}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow -\lambda\tau = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \tau = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{5}\right) = 1.36s$$

4. La valeur de c'.

$$C\,e^{-\lambda'(t+24T'_a)} = \frac{2}{3}C\,e^{-\lambda' t} \Rightarrow\ e^{-24\lambda' T'_a} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \ln\left(e^{-24\lambda' T'_a}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow -24\lambda' T'_a = -\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 24\lambda' T_a = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -\lambda' = \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{24T_a} = \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{24\frac{2\pi}{\omega_a}} = \frac{\omega_a \ln\left(\frac{3}{2}\right)}{48\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda'^2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{48\pi}$$

$$\lambda' = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda'^2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{48\pi} \Rightarrow \lambda'^2 = \frac{\left(\omega_0^2 - \lambda'^2\right)\left(\ln\frac{3}{2}\right)^2}{(48\pi)^2}$$

$$\Rightarrow \lambda' = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{(48\pi)^2 + \left(\ln\frac{3}{2}\right)^2}}; AN \ : \ \lambda' = ... s^{-1}$$

$$\text{Or que } : \lambda' = \frac{c'}{M+6m} \Rightarrow c' = \lambda'(M+6m)$$