3.3.5 Exercice 5

1. Pour le système de la figure 3.10, établir l'équation différentielle du mouvement et déduire la pulsation propre ainsi que le facteur d'amortissement.

2. Pour chacun des cas suivant, déduire la nature du mouvement :

   (a) $M = 2\ Kg$, $k_1 = 50\ N/m$, $k_2 = 40\ N/m$, $c_1 = 0.3\ Ns/m$, $c_2 = 0.2\ Ns/m$.

   (b) $M = 2\ Kg$, $k_1 = 23\ N/m$, $k_2 = 27\ N/m$, $c_1 = 8\ Ns/m$, $c_2 = 12\ Ns/m$.

   (c) $M = 2\ Kg$, $k_1 = 1.5\ N/m$, $k_2 = 0.5\ N/m$, $c_1 = 5.5\ Ns/m$, $c2 = 2.5\ Ns/m$.

3. Écrire l'équation horaire $y(t)$, sachant que à $t = 0$: $y(0) = 1\ cm$ et la vitesse $-6\ cm/s$

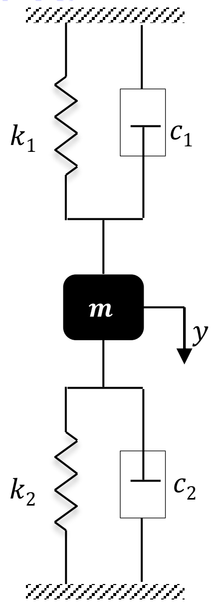

FIGURE 3.10 –

Corrigé de l'exercice 5

1. Équation différentielle du mouvement, la pulsation propre et le facteur d'amortissement.

   Énergie cinétique

   $$T = \frac{1}{2} m \, \dot{y}^2 \Rightarrow M_0 = m$$

   Énergie potentielle

   $$U = \frac{1}{2} k_1 \, y^2 + \frac{1}{2} k_2 \, (-y)^2 = \frac{1}{2} \left(k_1 + k_2\right) \, y^2 \Rightarrow K_0 = k_1 + k_2$$

   Fonction de dissipation

   $$D = \frac{1}{2} c_1 \, \dot{y}^2 + \frac{1}{2} c_1 \, (-\dot{y})^2 = \frac{1}{2} \left(c_1 + c_2\right) \, \dot{y}^2 \Rightarrow C_0 = c_1 + c_2$$

   Equation différentielle du mouvement

   $$M_0 \ddot{y} + K_0 y + C_0 \dot{y} = 0$$

   $$m \ddot{y} + \left(k_1 + k_2\right) y + \left(c_1 + c_2\right) \dot{y} = 0$$

   $$\ddot{y} + \frac{k_1 + k_2}{m} y + \frac{c_1 + c_2}{m} \dot{y} = 0$$

   Avec :

   $$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{M_0}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

   $$\lambda = \frac{C_0}{2M_0} = \frac{c_1 + c_2}{2m}$$

2. La nature du mouvement

   (a) $M = 2Kg$, $k_1 = 50N/m$, $k_2 = 40N/m$, $c_1 = 0.3Ns/m$, $c_2 = 0.2Ns/m$.

   $$\omega_0 = \sqrt{\frac{(k + k_2)}{m}} = 6.7 \, rad/s \; et \, \lambda = \frac{(c_1 + c_2)}{2m} = 0.125$$

On a $\lambda < \omega_0$ le mouvement est donc faiblement amorti.

(b) $M = 2Kg$, $k_1 = 23N/m$, $k_2 = 27N/m$, $c_1 = 8Ns/m$, $c_2 = 12Ns/m$.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(k+k_2)}{m}} = 5\,rad/s\ et\ \lambda = \frac{(c_1+c_2)}{2m}{=}5$$

On a $\lambda = \omega_0$ le mouvement est à amortissement critique.

(c) $M = 2Kg$, $k_1 = 1.5N/m$, $k_2 = 0.5N/m$, $c_1 = 5.5Ns/m$, $c2 = 2.5Ns/m$.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(k_1+k_2)}{m}} = 1\,rad/s\ et\ \lambda = \frac{(c_1+c_2)}{2m}{=}2$$

On a $\lambda > \omega_0$ le mouvement est fortement amorti.

3. L'équation horaire y(t)

(a) Cas (a) : système faiblement amorti, la solution est de la forme :

$$y\,(t) = C\,e^{-\lambda t}\cos\left(\omega_a\,t+\phi\right)$$

$$y\,(t) = C\,e^{-0.125t}\cos\left(6.7\,t+\phi\right)$$

$$\dot{y}\,(t) = -\lambda C\,e^{-\lambda t}\cos\left(\omega_a\,t+\phi\right) - C\omega_a\,e^{-\lambda t}\sin\left(\omega_a\,t+\phi\right)$$

$$\dot{y}\,(t) = -\lambda C\,e^{-0.125t}\cos\left(6.7\,t+\phi\right) - 6.7C\,e^{-0.125t}\sin\left(6.7\,t+\phi\right)$$

Pour t=0 :

$$y\,(0) = C\ \cos\left(\phi\right) = 1$$

$$\dot{y}\,(0) = -0.125\ C\ \cos\left(\phi\right) - 6.7\ C\ \sin\left(\phi\right) = -6$$

$$\begin{cases} \tan\left(\phi\right) = 0.87 \Rightarrow \phi = 41.24^\circ \\ C = 1.329\,\mathrm{cm} \end{cases}$$

(b) Cas (b) : amortissement critique, la solution est de la forme :

$$y\,(t) = \left(C_1 + C_2 t\right)e^{-\lambda t}$$

$$y(0) = (C_1 + C_2(0))\, e^{-\lambda(0)} = 1 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt} y(t) = -\lambda (C_1 + C_2 t)\, e^{-\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t}$$

$$\dot{y}(0) = -\lambda (C_1 + C_2(0))\, e^{-\lambda(0)} + C_2 e^{-\lambda(0)} = -6$$

$$\dot{y}(0) = -\lambda + C_2 = -6 \Rightarrow C_2 = -6 + \lambda = -1$$

$$y(t) = (1 - t)\, e^{-5t}$$

(c) Cas (c) : fortement amorti, la solution est de la forme :

$$y(t) = C_1\, e^{s_1 t} + C_2\, e^{s_2 t}$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$\dot{y}(t) = \left(-2 - \sqrt{3}\right) C_1\, e^{\left(-2-\sqrt{3}\right)t} + \left(-2 + -\sqrt{3}\right) C_2\, e^{\left(-2+\sqrt{3}\right)t}$$

$$\dot{y}(0) = \left(-2 - \sqrt{3}\right) C_1 + \left(-2 + \sqrt{3}\right) C_2 = -6$$

$$\Rightarrow C_1 = 2.23cm; C_2 = -1.23cm$$