3.3.4 Exercice 4

Le système de la figure 3.9 est constitué d'un disque homogène de rayon R oscillant autour de son axe fixe o, est relié à un bâti par un amortisseur de coefficient c. Une masse m est fixée d'une part au disque et fait un mouvement oscillatoire avec son mouvement et d'autre part à un ressort de raideur k. On donne $|oA| = \frac{R}{2}$

- Pour des faibles oscillations, établir l'équation différentielle du mouvement et déduire la pulsation propre ainsi que le facteur d'amortissement.

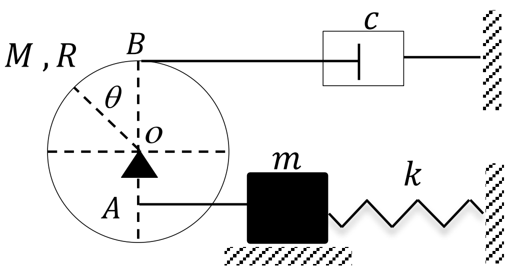

FIGURE 3.9 –

Corrigé de l'exercice 4

Énergie cinétique

$$T^{Cyl} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T^m = \frac{1}{2}m\dot{x}_A^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(m\frac{R^2}{4}\right)\dot{\theta}^2$$

$$T^{Sys} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(m\frac{R^2}{4}\right)\dot{\theta}^2$$

$$T^{Sys} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + m\frac{R^2}{4}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M_0\dot{\theta}^2$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}\,k\,x_A^2 = \frac{1}{2}\,k\left(\frac{R}{2}\theta\right)^2 = \frac{1}{2}\,\left(k\frac{R^2}{4}\right)\theta^2 = \frac{1}{2}\,K_0\theta^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}c\dot{x}_B^2 = \frac{1}{2}c\Big(R\dot{\theta}\Big)^2 = \frac{1}{2}\left(cR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}C_0\dot{\theta}^2$$

Équation différentielle du mouvement

$$M_0\ddot{\theta} + K_0\theta + C_0\dot{\theta} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + m\frac{R^2}{4}\right)\ddot{\theta} + \left(k\frac{R^2}{4}\right)\theta + \left(cR^2\right)\dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\left(k\frac{R^2}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + m\frac{R^2}{4}\right)}\theta + \frac{\left(cR^2\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + m\frac{R^2}{4}\right)}\dot{\theta} = 0$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{M_0}} = \sqrt{\frac{\left(k\frac{R^2}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + m\frac{R^2}{4}\right)}} = \sqrt{\frac{k}{2M + m}}$$

$$\lambda = \frac{C_0}{2M_0} = \frac{\left(cR^2\right)}{2\left(\frac{1}{2}MR^2 + m\frac{R^2}{4}\right)} = \frac{2c}{2M + m}$$