3.3.3 Exercice 3

Dans la figure 3.8 la tige de masse $2\,m$ et de longueur $4\,l$ peut osciller atour de son axe horizontal fixé au point o.
Pour des faibles oscillations, établir l'équation différentielle du mouvement et déduire la pulsation propre ainsi que le facteur d'amortissement.

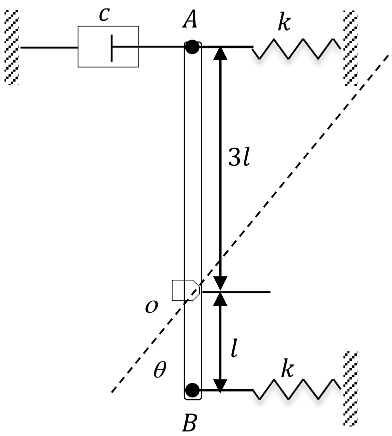

FIGURE 3.8 –

Corrigé de l'exercice 3

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{12} J_o \dot{\theta}^2\,;$$

$$\text{avec }: J_o = J_G + 2m|oG|^2 = \frac{1}{12}(2m)(4l)^2 + 2ml^2 = \frac{56}{12}ml^2 = \frac{14}{3}ml^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{14}{3}ml^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M_0\dot{\theta}^2$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k\,x_A^2 + \frac{1}{2}k\,x_B^2 - mgl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}k\,(3l\,\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}k\,(l\,\sin\theta)^2 - mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$U = \frac{1}{2}k\,(3l\,\theta)^2 + \frac{1}{2}k\,(l\,\theta)^2 - mgl\frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2}\,\left(10kl^2 - mgl\right)\theta^2 = \frac{1}{2}\,K_0\theta^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2} c\, \dot{x}_A^2 = \frac{1}{2} c \left(3l\, \dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(9cl^2\right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\, C_0\, \dot{\theta}^2$$

Équation différentielle du mouvement

$$M_0 \ddot{\theta} + K_0 \theta + C_0 \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \left(\frac{14}{3} m l^2\right) \ddot{\theta} + \left(10kl^2 - mgl\right) \theta + \left(9cl^2\right) \dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{30kl^2 - 3mgl}{14ml^2}\right) \theta + \left(\frac{27c}{14m}\right) \dot{\theta} = 0$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{M_0}} = \sqrt{\frac{30kl^2 - 3mgl}{14ml^2}} = \sqrt{\frac{30kl - 3mg}{14ml}}$$

$$\lambda = \frac{C_0}{2M_0} = \frac{9cl^{\,2}}{2\left(\frac{14}{3} m l^2\right)} = \frac{27cl^{\,2}}{28ml^2} = \frac{27c}{28m}$$