3.3.2 Exercice 2

La figure 3.7 représente un cylindre homogène de masse $2M$ et de rayon R qui peut osciller atour de son axe horizontal fixé "o". On soude perpendiculairement à son axe une tige de longueur l et de masse négligeable. L'autre extrémité est fixée à un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient d'amortissement c.

1. Pour des faible oscillations, Etablir l'équation différentielle du mouvement et déduire la pulsation propre et le facteur d'amortissement.
2. Sachant que La période des oscillations est de $1s$, et que l'amplitude des oscillations chute de moitié après 5 oscillation, calculer k et c. On donne $M = 5kg$, $R = 0.2m$ et $l = 2m$.

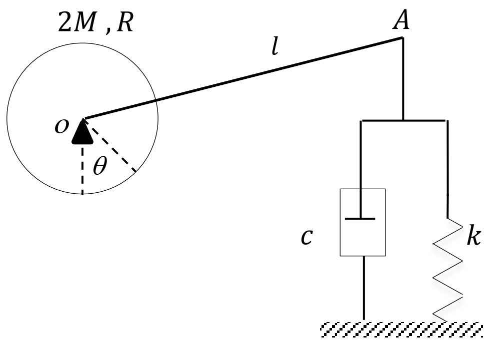

FIGURE 3.7 –

Corrigé de l'exercice 2

1. Pour des faible oscillations, Etablir l'équation différentielle du mouvement et déduire la pulsation propre et le facteur d'amortissement.

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}2MR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(MR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M_0\dot{\theta}^2$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k\,x_A^2 = \frac{1}{2}k\,(l\,\sin\theta)^2 = \frac{1}{2}\left(kl^2\right)\theta^2 = \frac{1}{2}\,K_0\theta^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}c\,\dot{x}_A^2 = \frac{1}{2}\left(cl^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\,C_0\,\dot{\theta}^2$$

Équation différentielle du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\,T}{\partial\,\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial U}{\partial\,\theta} + \frac{\partial\,D}{\partial\,\dot{\theta}} = 0$$

$$M_0\,\ddot{\theta} + K_0\,\theta + C_0\,\dot{\theta} = 0$$

$$\left(MR^2\right)\ddot{\theta} + \left(kl^2\right)\theta + \left(cl^{\,2}\right)\dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{kl^2}{MR^2}\right)\theta + \left(\frac{cl^2}{MR^2}\right)\dot{\theta} = 0$$

La pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{M_0}} = \sqrt{\frac{kl^2}{MR^2}}$$

Le facteur d'amortissement

$$\lambda = \frac{C_0}{2M_0} = \frac{cl^2}{2\,(MR^2)}$$

2. Sachant que La période des oscillations est de $1s$, et que l'amplitude des oscillations chute de moitié après 5 oscillation, calculer k et c.

   On a :

$$T_a = 1\,s\,;\;\; n = 5 \text{ et } \chi = \ln\left(\frac{100}{50}\right) = 0.693$$

$$\chi = \ln(\frac{x(t_0)}{x(t_0 + nT_a)}) = n\lambda T_a \Rightarrow \ln(2) = 5\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{5} = 0.1386$$

Or que :

$$\lambda = \frac{C_0}{2M_0} = \frac{c\, l^2}{2MR^2} \Rightarrow c = \frac{2\lambda MR^2}{l^2} = \frac{2 \times 0.14 \times 5 \times (0.2)^2}{(2)^2} = 0.01386 \text{ Ns/m}$$

D'autre part on a :

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_a^2 + \lambda^2} = 6.2847 rd/s$$

Avec :

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = 2\pi \text{ rd/s}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{kl^2}{MR^2}} = 6.29 \Rightarrow 39{,}56 = \frac{kl^2}{MR^2} \Rightarrow k = \frac{39.56 \times MR^2}{l^2} = 1.978 \ N/m$$