3.3.17 Exercice 17

Un amortisseur sous amorti doit être conçu pour une motocyclette d'une masse de 200 kg (figure 3.20(a)).
Lorsque l'amortisseur est soumis à une vitesse verticale initiale due à un choc sur la route, la courbe de déplacement en fonction du temps qui en résulte doit être celle indiquée à la figure 3.20(b).

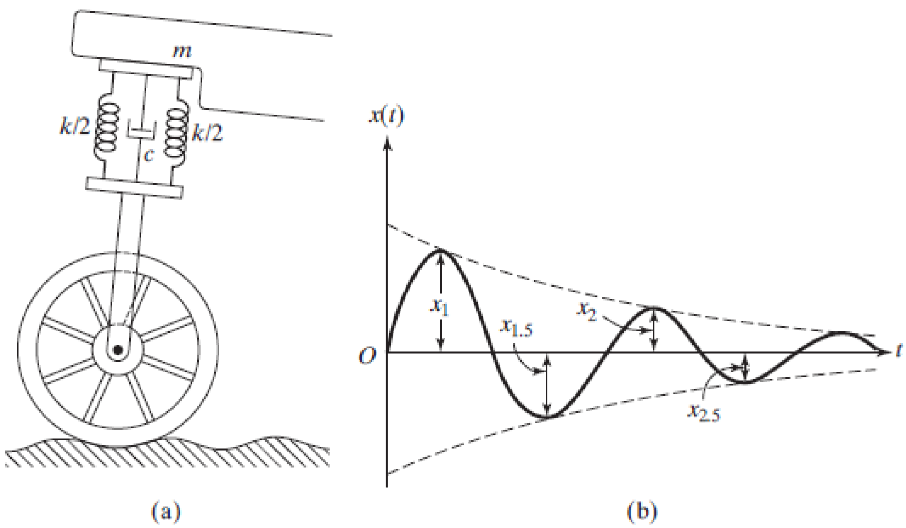

FIGURE 3.20 –

1. Déterminer les constantes de rigidité et d'amortissement nécessaires de l'amortisseur si la période de vibration atténuée doit être de 2 s et que l'amplitude doit être réduite à un quart par demi-cycle (c.-à-d.$x_{1.5} = x_1/4$).
2. Trouver également la vitesse minimale initiale qui conduit à un déplacement maximal de 250 mm.

On donne :

$$x(t) = A^{-\zeta\,\omega_0\,t}\cos\left(\omega_a\,t\right)$$

Correction de l'exercice 17

1.
$$\chi = \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln 16 \; = \; 2,7726 \; = \; \frac{2\,\pi\,\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = 0.4037$$

$$T_a = 2 \; = \; \frac{2\,\pi}{\omega_a} = \frac{2\,\pi}{\omega_0\,\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.4338\,rad/s$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{c}{2\,m} \Rightarrow \; c = 2\,m\,\lambda \\ \zeta = \frac{\lambda}{\omega_0} \Rightarrow \lambda = \zeta\,\omega_0 \end{cases} \Rightarrow c = 2\;\zeta\,m\;\omega_0 = 554.4981\;N\;s/m$$

$$k \; = \; m\,\omega_0^2 \; = \; 2358.2652\;N/m$$

2.
$$x = A^{-\zeta\,\omega_0\,t}\;\cos\,(\omega_a\,t)$$

Le maximum est obtenu pour :

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\zeta\,\omega_0\,A^{-\zeta\,\omega_0\,t}\;\cos\,(\omega_a\,t)\;-\;\omega_a A^{-\zeta\,\omega_0\,t}\;\sin\,(\omega_a\,t) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = A^{-\zeta\,\omega_0\,t}\,[-\zeta\,\omega_0\;\cos\,(\omega_a\,t) - \;\omega_a\;\sin\,(\omega_a\,t)] = 0$$

$$A^{-\zeta\,\omega_0\,t} \neq 0 \;\Rightarrow -\zeta\,\omega_0\;\cos\,(\omega_a\,t) - \;\omega_a\;\sin\,(\omega_a\,t) = 0$$

$$\sin\,(\omega_a\,t+\varphi) = \frac{-\zeta\,\omega_0\;\cos\,(\omega_a\,t)}{\omega_a}$$

$$\tan\,(\omega_a\,t+\varphi) = \frac{-\zeta\,\omega_0}{\omega_a} = \frac{-\zeta\,\omega_0}{\omega_0\,\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$\tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1}{\tan^2 a + 1}$$

$$\cos a = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 a}}$$

On pose : $a = (\omega_a \, t)$

$$\cos(\omega_a \, t) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 (\omega_a \, t)}}$$

$$\cos(\omega_a \, t) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}}}$$

$$\cos(\omega_a \, t) = \pm\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\sin(\omega_a \, t) = \frac{-\zeta\,\omega_0 \cos(\omega_a \, t)}{\omega_a} = \frac{-\zeta\,\omega_0 \left(\pm\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\omega_a}$$

$$\sin(\omega_a \, t) = \frac{-\zeta\,\omega_0 \left(\pm\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\omega_a} = \frac{-\zeta\,\omega_0 \left(\pm\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\sin(\omega_a \, t) = \mp\zeta$$

$$\frac{dx}{dt} = A^{-\zeta\,\omega_0\,t}\left[-\zeta\,\omega_0 \cos(\omega_a \, t) - \omega_a \sin(\omega_a \, t)\right] = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = A^{-\zeta\,\omega_0\,t}\left[-\zeta\,\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} - \omega_a\,(-\zeta)\right] = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = A^{-\zeta\,\omega_0\,t}\left[-\zeta\,\omega_a - \omega_a\,(-\zeta)\right] = 0$$

$$x_{\max} \Rightarrow \begin{cases} \cos\,(\omega_a\, t) \;= \pm\sqrt{1-\zeta^2} \\ \sin\,(\omega_a\, t) = \mp\zeta \end{cases}$$

$$\cos\,(\omega_a\, t_1) \;= \sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \cos\,(\pi\, t_1) = 0.9149$$

$$\cos\,(\pi\, t_1) = 0.9149 \Rightarrow \; t_1 = \frac{\cos^{-1}\,(0.9149)}{\pi} = 0.3678\, s$$

$$x_{\max} = x(t_1) = \; A^{-\zeta\,\omega_0\, t_1}\, \cos\,(\omega_a\, t_1) = A^{-\zeta\,\omega_0\, t_1}\sqrt{1-\zeta^2} = 0.25 \; m$$

$$\Rightarrow A = 0.4550 \; m$$

$$\dot{x}(0) = A^{-\zeta\,\omega_0\,\times 0}\,[-\zeta\,\omega_0\, \cos\,(\omega_a \;\times 0) - \; \omega_a\, \sin\,(\omega_a \;\times 0)]$$

$$\dot{x}(0) = -A\,\zeta\; \omega_0 = 1.4287 \; m/s$$