

3.3 Exercices corrigés

3.3.1 Exercice 1

La figure 3.6 représente un disque qui peut osciller autour de son axe horizontal fixé "o". Une tige de masse m et de longueur l est soudée au disque comme l'indique la figure. On donne $|oA| = \frac{R}{2}$.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement et déduire la pulsation propre et le facteur d'amortissement.

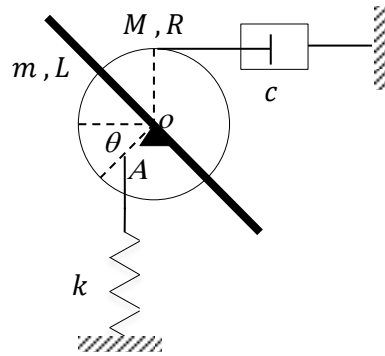


FIGURE 3.6 -

Corrigé de l'exercice 1

Energie cinétique

$$T^{Cyl} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \dot{\theta}^2$$

$$T^{Tige} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} ml^2 \right) \dot{\theta}^2$$

$$T^{Sys} = T^{Cyl} + T^{Tige} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} ml^2 \right) \dot{\theta}^2$$

$$T^{Sys} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} ml^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M_0 \dot{\theta}^2$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2} k x_A^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{R}{2} \theta \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{kR^2}{4} \right) \theta^2 = \frac{1}{2} K_0 \theta^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2} c \dot{x}_B^2 = \frac{1}{2} c (R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} (cR^2) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} C_0 \dot{\theta}^2$$

Equation différentielle du mouvement

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$M_0 \ddot{\theta} + K_0 \theta + C_0 \dot{\theta} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} ml^2 \right) \ddot{\theta} + \left(\frac{kR^2}{4} \right) \theta + (cR^2) \dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{\frac{kR^2}{4}}{\left(\frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} ml^2 \right)} \right) \theta + \left(\frac{cR^2}{\left(\frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} ml^2 \right)} \right) \dot{\theta} = 0$$

La pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{M_0}} = \sqrt{\frac{\frac{kR^2}{4}}{\frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} ml^2}}$$

Le facteur d'amortissement

$$\lambda = \frac{C_0}{2M_0} = \frac{cR^2}{2 \left(\frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} ml^2 \right)}$$