2.3.7 Exercice 7

Un cylindre homogène de masse M et de rayon R peut osciller autour de son centre d'inertie O. Trois ressorts de raideur k sont fixés aux points O, A et B tel que : $|OB| = R/2$.

1. Trouver l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.
2. Déduire l'équation différentielle du mouvement et la pulsation propre des oscillations.

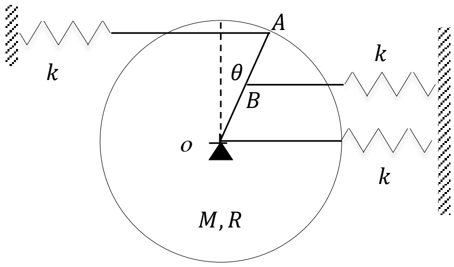

FIGURE 2.11 –

Corrigé de l'exercice 7

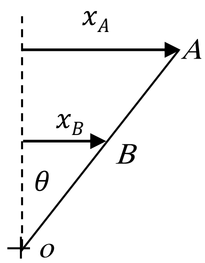

FIGURE 2.12 –

D'après la figure 2.12 :

$$x_B = \frac{R}{2} \sin\,\theta = \frac{R}{2}\,\theta$$

$$x_A = R\,\sin\,\theta = R\,\theta$$

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} J_{/o}\, \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{M\ R^2}{2}\right] \dot{\theta}^2 \Rightarrow M_0 = \frac{M\ R^2}{2}$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}\, k\, \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}\, k\, \dot{x}_B^2 = \frac{1}{2}\, k\, R^2\, \theta^2 + \frac{1}{2}\, k\, \frac{R^2}{4}\, \theta^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{4} k\ R^2\right] \theta^2$$

$$\Rightarrow K_0 = \frac{\partial U^2}{\partial \theta^2} = \frac{5}{4} k\ R^2$$

Équation différentielle du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\, T}{\partial\, \dot{\theta}}\right) + \frac{\partial U}{\partial\, \theta} = 0$$

$$M_0\, \ddot{\theta} + K_0\, \theta = 0$$

$$\frac{M\ R^2}{2}\, \ddot{\theta} + \frac{5}{4} k\ R^2\, \theta = 0$$

La pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{M_0}} = \sqrt{\frac{\frac{5}{4} k\ R^2}{\frac{M\ R^2}{2}}}$$