2.3.6 Exercice 6

Dans la figure 2.10, la corde qui maintient la masse m est inextensible et sans masse. Elle roule sans glisser sur la gorge de la poulie (de masse M et de rayon R).

1. Trouver l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.
2. Déduire la pulsation propre des oscillations.

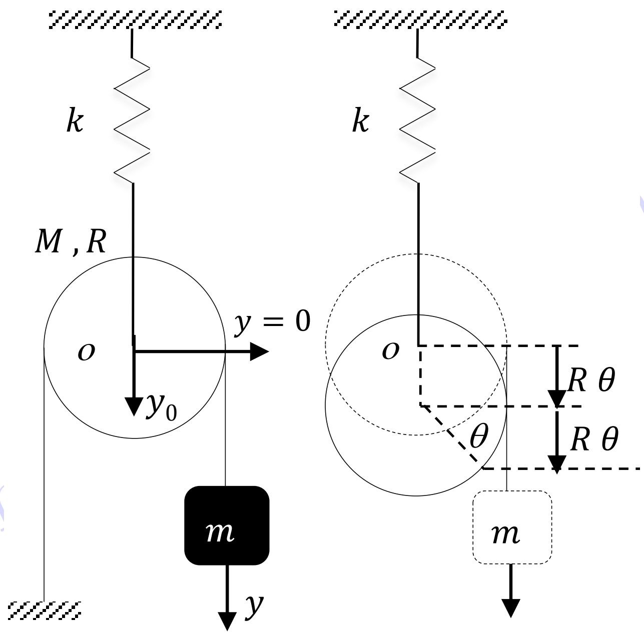

FIGURE 2.10 –

Corrigé de l'exercice 6

D'après la figure 2.10 :

$$y_0 = R\,\theta \Rightarrow \theta = \frac{y_0}{R}$$

$$y = 2\ R\,\theta = 2\,y_0$$

Énergie cinétique

$$T^{sys} = T^M + T^m$$

$$T^M = \frac{1}{2} M \dot{y}_0^2 + \frac{1}{2} J_{/o} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{M}{4}\right] \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{M R^2}{8 R^2}\right] \dot{y}^2$$

$$T^M = \frac{1}{2} \left[\frac{3 M}{8}\right] \dot{y}^2$$

$$T^m = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$T^{sys} = \frac{1}{2} \left[\frac{3 M}{8} + m\right] \dot{y}^2$$

$$M_0 = \frac{3 M}{8} + m$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2} k (y_0 + \triangle l)^2 - M g y_0 - m g y$$

$$U == \frac{1}{2} k \left(\frac{y}{2} + \triangle l\right)^2 - \left(\frac{M g}{2} - m g\right) y$$

La condition d'équilibre s'écrit :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_{(y=0)} = 0 \Rightarrow k\frac{\triangle l}{2} - \left(\frac{M g}{2} - m g\right) = 0$$

D'où l'expression simplifiée de l'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{k}{4}\right] y^2$$

$$K_0 = \frac{k}{4}$$

La pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{M_0}} = \sqrt{\frac{\frac{k}{4}}{\frac{3 M}{8} + m}}$$