2.3.5 Exercice 5

Dans la figure 2.8, la masse de la tige OB est négligeable. A l'équilibre, la tige est horizontale, on ne s'intéresse qu'aux oscillations de faibles amplitudes.

1. Trouver l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.
2. Déduire l'équation différentielle du mouvement et la pulsation propre des oscillations

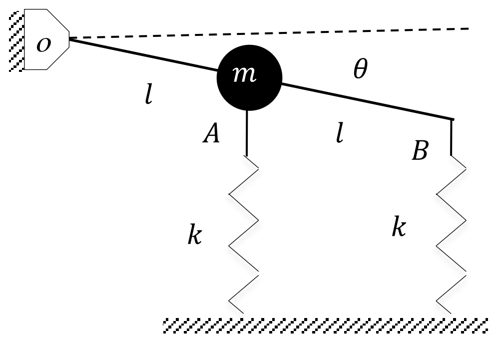

FIGURE 2.8 –

Corrigé de l'exercice 5

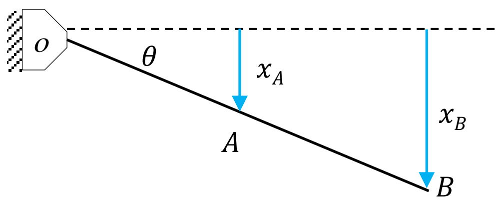

FIGURE 2.9 –

D'après la figure 2.9 :

$$x_B = 2\,l\,\sin\theta = 2\,l\,\theta$$

$$x_A = l\,\sin\theta = l\,\theta$$

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}_A^2 = \frac{1}{2}\, m\, l^2\, \dot{\theta}$$

$$M_0 = m\, l^2$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}\, k\, (x_A + \triangle l_A)^2 + \frac{1}{2}\, k\, (x_B + \triangle l_B)^2 - m\, g\, x_A$$

$$U = \frac{1}{2}\, k\, (l\, \theta + \triangle l_A)^2 + \frac{1}{2}\, k\, (2\, l\, \theta + \triangle l_B)^2 - m\, g\, l\, \theta$$

La condition d'équilibre s'écrit :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_{(\theta=0)} = 0 \Rightarrow l\, k \triangle l_A + 2l\; k\, \triangle l_B - m\, g\, l = 0$$

D'où l'expression simplifiée de l'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}\, \left(5\, k\, l^2\right)\, \theta^2$$

$$K_0 = 5\, k\, l^2$$

Équation différentielle du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\, T}{\partial\, \dot{\theta}}\right) + \frac{\partial U}{\partial\, \theta} = 0$$

$$M_0\, \ddot{\theta} + K_0\, \theta = 0$$

$$m\, l^2\, \ddot{\theta} + 5\, k\, l^2\, \theta = 0$$

La pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{M_0}} = \sqrt{\frac{5\, k\, l^2}{m\, l^2}}$$