### 2.3.4 Exercice 4

Un cylindre homogène de masse $M$ et de rayon $R$ peut rouler sans glisser sur un plan horizontal.
Trois ressort de raideur $k$ sont fixés aux points O, A et B. tel que : $|OB| = \frac{R}{2}$.

1. Trouver l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement et déduire la pulsation propre des oscillations.

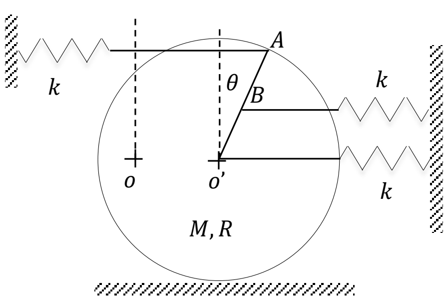


FIGURE 2.6 –



**Corrigé de l'exercice 4**

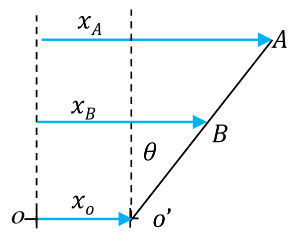


FIGURE 2.7 –

D'après la figure 2.7 :

$$x_o = R\,\theta$$
$$x_B = R\,\theta + \frac{R}{2}\sin\theta = R\,\theta + \frac{R}{2}\theta = \frac{3\,R}{2}\theta$$
$$x_A = R\,\theta + R\sin\theta = R\,\theta + R\,\theta = 2\,R\,\theta$$

**Énergie cinétique**

$$T \;=\; \frac{1}{2}\,M\,\dot{x}_o^2\;+\frac{1}{2}\,J_{/o}\,\dot{\theta}^2\;\;=\frac{1}{2}\,M\,R^2\,\dot{\theta}^2\;+\frac{1}{2}\left(\frac{M\,R^2}{2}\right)\,\dot{\theta}^2$$

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{3\,M\,R^2}{2}\right)\,\dot{\theta}^2$$

$$M_0=\frac{3\,M\,R^2}{2}$$

**Énergie potentielle**

$$U\;=\;\frac{1}{2}\,k\,x_o^2\;+\;\frac{1}{2}\,k\,x_B^2\;+\;\frac{1}{2}\,k\,x_A^2$$

$$U=\;\frac{1}{2}\,k\,R^2\,\theta^2\;+\;\frac{1}{2}\,k\,\frac{9}{4}\,R^2\,\theta^2\;+\;\frac{1}{2}\,k\,4\,R^2\,\theta^2$$

$$U=\frac{1}{2}\left(\frac{29}{4}k\,R^2\right)\,\theta^2$$

$$K_0=\frac{29}{4}k\,R^2$$

**Équation différentielle du mouvement**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\,T}{\partial\,\dot{\theta}}\right)+\frac{\partial U}{\partial\,\theta}=0$$

$$M_0\,\ddot{\theta}+K_0\,\theta=0$$

$$\frac{3\,M\,R^2}{2}\,\ddot{\theta}+\left(\frac{29}{4}k\,R^2\right)\,\theta=0$$

**La pulsation propre**

$$\omega_0\;=\sqrt{\frac{K_0}{M_0}}\;=\sqrt{\frac{\frac{29}{4}k\,R^2}{\frac{3\,M\,R^2}{2}}}$$