2.3.23 Exercice 23

La plate-forme carrée (P Q R S) et la voiture de la figure 2.32 ont une masse combinée M.

La plateforme est suspendue par quatre fils élastiques à un point fixe O, comme indiqué sur la figure 2.32. La distance verticale entre le point de suspension O et la position d'équilibre horizontal de la plate-forme est h.

Si le côté de la plateforme est "a" et que la rigidité de chaque fil est égale à "k", déterminer la période naturelle des vibrations verticales de la plate-forme.

On donne : $sqrt1 + F = 1 + \frac{F}{2}$

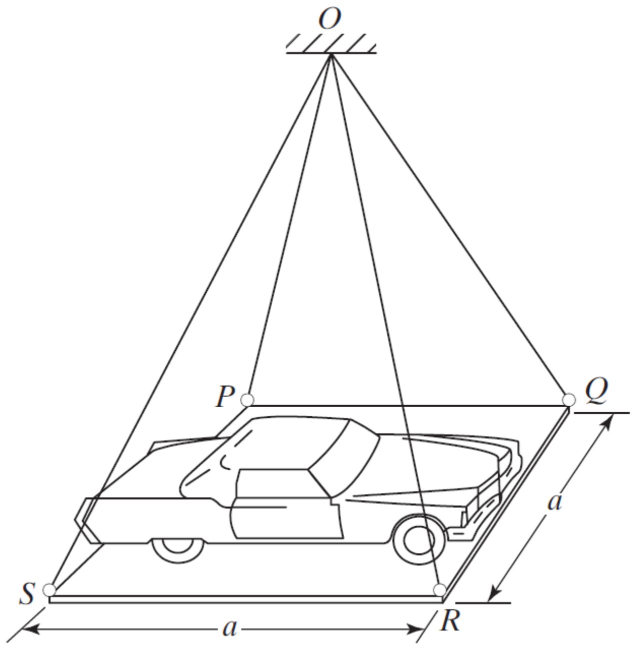
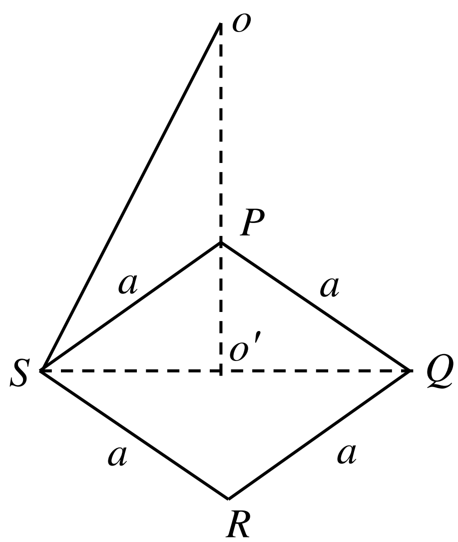


FIGURE 2.32 –

Correction de l'exercice 23

$$SO' = \frac{a}{\sqrt{2}};\ OO' = h;\ OS = \sqrt{SO'^2 + OO'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$$



$$OS + x_S = \sqrt{\frac{a^2}{2} + (h+x)^2} \Rightarrow x_S = \sqrt{\frac{a^2}{2} + (h+x)^2} - OS$$

$$x_S = \sqrt{\frac{a^2}{2} + (h+x)^2} - \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$$

$$x_S = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}\left(\frac{\sqrt{\frac{a^2}{2} + (h+x)^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}} - 1\right)$$

$$x_S = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}\left(\frac{\sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2 + 2\,h\,x + x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}} - 1\right)$$

$$x \lll \Rightarrow x^2 \to 0$$

$$x_S = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}\left(\frac{\sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2 + 2\,h\,x}}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}} - 1\right)$$

$$x_S = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}\left(\sqrt{1 + \frac{2\,h\,x}{\frac{a^2}{2} + h^2}} - 1\right)$$

$$\sqrt{1+F} = 1 + \frac{F}{2}$$

$$F = \frac{2\,h\,x}{\frac{a^2}{2}+h^2} \Rightarrow \sqrt{1+\frac{2\,h\,x}{\frac{a^2}{2}+h^2}} = 1 + \frac{h\,x}{\frac{a^2}{2}+h^2}$$

$$x_S = \sqrt{\frac{a^2}{2}+h^2}\left(1+\frac{h\,x}{\frac{a^2}{2}+h^2} - 1\right)$$

$$x_s = \frac{h}{\frac{a^2}{2}+h^2}x$$

$$U = 4 \times \left(\frac{1}{2}\,k\,x_s^2\right) = \frac{1}{2}\,k_{eq}\,x^2 \Rightarrow 4\,k\,x_s^2 \;=\; k_{eq}\,x^2$$

$$k_{eq} = 4\,k\frac{x_s^2}{x^2} \;=\; \frac{4\;k\,h^2}{\left(\frac{a^2}{2}+h^2\right)^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \frac{1}{\left(\frac{a^2}{2}+h^2\right)}\sqrt{\frac{4\;k\,h^2}{m}} \Rightarrow T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0}$$