2.3.15 Exercice 15*

Un mécanisme de pédale pour une machine est modélisé comme un pendule relié à un ressort, comme illustré à la figure 2.22.
Le but du ressort est de maintenir la pédale à peu près horizontale.

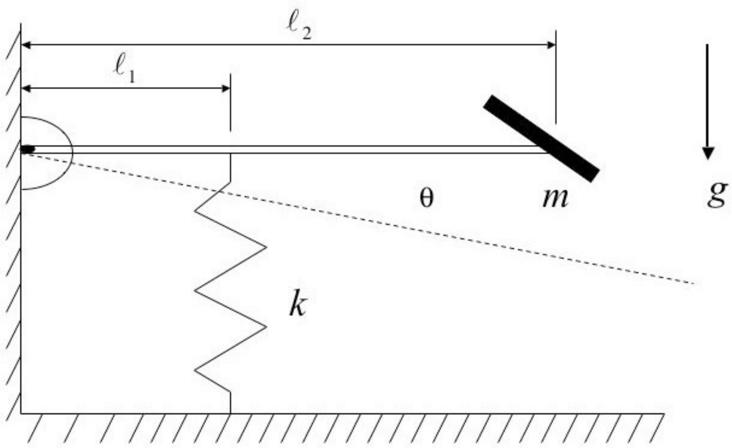

FIGURE 2.22 –

Calculez la raideur du ressort nécessaire pour maintenir le pendule horizontale, puis calculer la fréquence propre correspondante.
Supposons que les déviations angulaires soient faibles, de sorte que la déviation du ressort puisse être approximée par la longueur de l'arc, que la pédale puisse être traitée comme une masse ponctuelle et que la tige du pendule ait une masse négligeable.

Les valeurs sur la figure sont :

m = 0,5 kg, g = 9,8 m / s^2, ℓ_1 = 0,2 m et ℓ_2 = 0,3 m.

Correction de l'exercice 15

L'énergie potentielle :

$$U = -m\,g\,\ell_2 \sin\theta + \frac{1}{2}k\,(\Delta y + \ell_1 \sin\theta)^2$$

pour des faibles oscillations :

$$U \approx -m\,g\,\ell_2\,\theta + \frac{1}{2}k\,(\Delta\theta + \ell_1\,\theta)^2$$

La condition d'équilibre :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow -m\,g\,\ell_2 + k\,\ell_1^2\,\Delta\theta = 0$$

$$k = \frac{m\,g\,\ell_2}{\ell_1^2\,\Delta\theta} = \frac{0.5 \times 9.81 \times 0.3}{(0.2)^2 \times \frac{\pi}{180}} = 2106\ N/m$$

L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}\,J\,\ddot{\theta}$$

L'énergie potentielle après simplification :

$$U = \frac{1}{2}k\,(\ell_1\,\theta)^2$$

Équation différentielle du mouvement :

$$J\,\ddot{\theta} + +k\,\ell_1^2\,\theta = 0 \Leftrightarrow m\,\ell_2^2\,\ddot{\theta} + k\,\ell_1^2\,\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{k\,\ell_1^2}{m\,\ell_2^2}\right)\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k\,\ell_1^2}{m\,\ell_2^2}} = \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2}\sqrt{\frac{k}{m}} = 43.27\ rad/s$$