1.7.5 Exercice 5

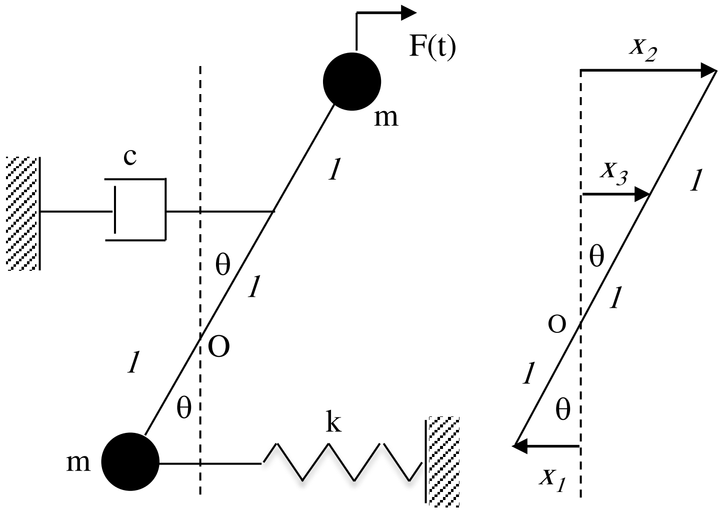

FIGURE 1.26 –

Le système de la figure 1.26, est forcé à osciller autour de la verticale, qui est la position d'équilibre, par une force sinusoïdale F qui reste horizontale lors du mouvement. Elle est donnée par $F = F_0 \cos \omega\, t$. Les frottements sont modélisés par un frottement visqueux de coefficient c. On suppose que l'amplitude du mouvement reste faible pour admettre l'approximation des faibles angles.

- Établir l'équation différentielle du mouvement.

Corrigé de l'exercice 5

$$x_1 = -x_3 = l\ \sin\theta \simeq l\,\theta$$

$$x_2 = 2\,l\ \sin\theta \simeq 2\,l\,\theta$$

Énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}\,[m\,l^2]\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\,[4\,m\,l^2]\,\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\,[5\,m\,l^2]\,\dot{\theta}^2 \;\Rightarrow M_0 = 5\,m\,l^2$$

Énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}kx_3^2 - 2\,m\,g\,l(1-\cos\theta) + m\,g\,l(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}kl^2\,\theta^2 - \frac{1}{2}m\,g\,l\,\theta^2$$

$$U = \frac{1}{2}[kl^2 - m\,g\,l]\theta^2 \;\Rightarrow K_0 = kl^2 - m\,g\,l$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\,c\,\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}\,c\,l^2\,\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow C_0 = c\,l^2$$

Le travail développé par la force d'excitation

$$W = F(t)\,x_2 = 2\,F(t)\,l\,\theta$$

$$\Rightarrow F_0 = 2\,F(t)\,l$$

Équation différentielle du mouvement

$$M_0\,\ddot{\theta} + K_0\,\theta + C_0\,\dot{\theta} = F_0$$

$$[5\,m\,l^2]\,\ddot{\theta} + [k\,l^2 - m\,g\,l]\,\theta + [c\,l^2]\,\dot{\theta} = 2\,F(t)\,l$$