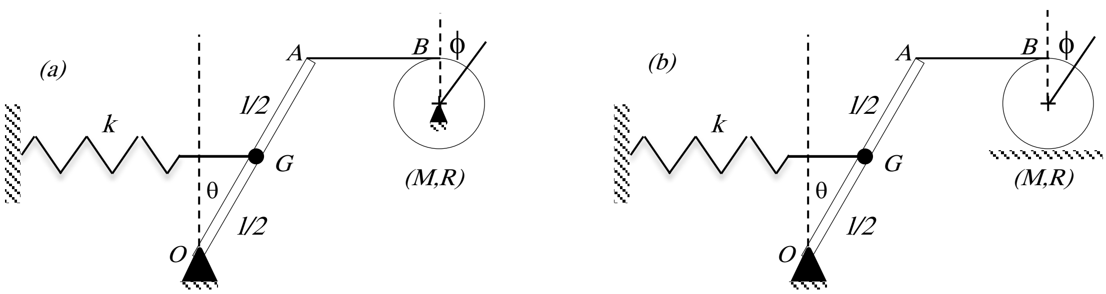
1.7.2 Exercice 2

Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de chaque système.



Le disque est en oscillation atour de son axe « o » Le disque est en roulement sans glissement

FIGURE 1.23 –

Corrigé de l'exercice 2

Système (a)

Énergie cinétique

$$T^{sys} = T^{bar} + T^{dis}$$

$$T^{bar} = \frac{1}{2}\, J_O\, \dot{\theta}^2$$

Or que :

$$J_O = J_G + m \mid OG \mid^2 = \frac{m\, l^2}{12} + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m\, l^2}{3}$$

D'où :

$$T^{bar} = \frac{m\, l^2}{6}\, \dot{\theta}^2$$

$$T^{dis} = \frac{1}{2}\, J_C\, \dot{\phi}^2$$

Or que :

$$J_C = \frac{M R^2}{2}$$

D'où :

$$T^{dis} = \frac{MR^2}{4}\,\dot{\phi}^2$$

Finalement :

$$T^{sys} = \frac{m\,l^2}{6}\,\dot{\theta}^2 + \frac{MR^2}{4}\,\dot{\phi}^2$$

D'autre part, on a une liaison entre θ et ϕ (voir exercice 1, système "e") :

$$\phi\ = \frac{l}{R}\,\theta$$

On obtient :

$$T^{sys} = \left(\frac{m\,l^2}{6} + \frac{Ml^2}{4}\right)\,\dot{\theta}^2$$

Énergie Potentielle

$$U^{sys} = U^k + U^m = \frac{1}{2}\,k\,x_G^2 - m\,g\,h$$

$$U^{sys} = \frac{1}{2}\,k\,\left(\frac{l\,\theta}{2}\right)^2 - m\,g\,\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

Or que pour des faibles oscillations :

$$1-\cos\theta = \frac{\theta^2}{2}$$

D'où :

$$U^{sys} = \left(\frac{k\,l^2}{8} + \frac{m\,g\,l}{4}\right)\,\theta^2$$

Système (b) On a un roulement sans glissement, donc le mouvement peut être décomposé en deux : un mouvement de translation et un mouvement de rotation, d'où l'énergie cinétique :

$$T^{bar} = \frac{m\,l^2}{6}\,\dot{\theta}^2$$

$$T^{dis} = \frac{1}{2}\,M\,\dot{x}_C^2 + \frac{1}{2}\,J_C\,\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}\,M\,(R\,\dot{\phi})^2 + \frac{MR^2}{4}\,\dot{\phi}^2$$

$$T^{dis} = \frac{3\,MR^2}{4}\,\dot{\phi}^2$$

D'autre part, on a une liaison entre θ et ϕ (voir exercice 1, système "f") :

$$\phi \;= \frac{l}{2\,R}\,\theta$$

On obtient :

$$T^{dis} = \frac{3\,MR^2}{4}\,\dot{\phi}^2 = \frac{3\,Ml^2}{16}\,\dot{\theta}^2$$

D'où :

$$T^{sys} = \left(\frac{m\,l^2}{6} + \frac{3\,Ml^2}{16}\right)\,\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle du système (b) est identique à celle du système (a)