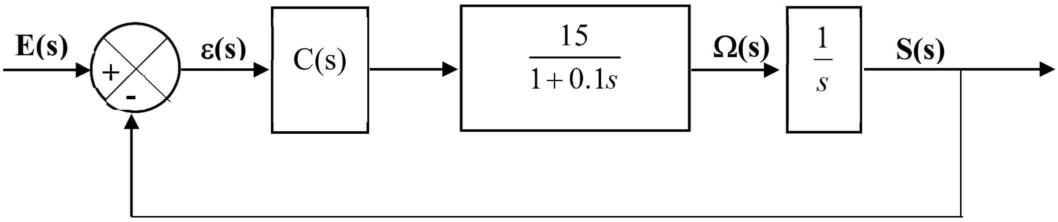
Exercice 3: Asservissement de position du moteur à courant continu

Un asservissement de position angulaire d'un moteur à courant continu peut être représenté par le schéma-bloc de la figure. L'entrée est une tension (exprimée en volt) et la sortie est un angle (exprimée en radian).



On suppose que le correcteur est un simple amplificateur c.-à-d. C(p) = K.

1. Calculer la FTBF du système corrigé. En déduire les expressions du coefficient d'amortissement, de la pulsation propre et du gain statique G.
2. Justifier physiquement la valeur du gain statique.
3. On impose pour cette boucle un amortissement de 0.52 ; en déduire le réglage correspondant de K. Evaluer le temps de réponse.
4. La consigne est un échelon d'amplitude 2V c.-à-d. e(t) = 2u(t). Calculer la sortie S1 en régime permanent (S est une position angulaire qui s'exprime en radian).
5. On considère maintenant un correcteur PI, Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système.
6. En utilisant le critère de Routh, determiner pour quelles valeurs de K et Ti le système reste stable en boucle fermé.
7. A partir du résultat de la question précédente, expliquer pourquoi la technique de réglage par compensation (c-a-d T1 = 0.1s) , n'est pas pertinante ici.

8. On utilise un correcteur PID non standard dont la fonction de transfert est donnée par :

$$C(s) = K\frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{T_1 s}$$

On choisit de compenser la constante de temps du système à corriger en _xant T1 = 0:1s.

8.1. Determiner la fonction de transfert en boucle fermée du système.

8.2. En utilisant le critère de Routh, montrer que le système en boucle fermé reste stable quelque soit la valeur de K et T1. Ce résultat est-il surprenant ?

8.3. Determiner les expressions de l'amortissement m1 et de la pulsation propre du système en boucle fermée. Pour répondre à cette question, on negligera la présence du zéro au numérateur.

8.4. On impose un amortissement m = 0.52 et un temps de réponse tr = 0.5s. En déduire les valeurs de K et T2.

Solution

$$FTBF = \frac{\dfrac{15K}{(1+0.1s)s}}{1+\dfrac{15K}{(1+0.1s)s}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{15K}s+\dfrac{0.1}{15K}s^2}$$

En boucle fermé, le système corrigé se comporte alors qu'un système de second ordre avec :

- Un gain statique unitaire G=1
- Une pulsation propre égale à : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{15K}{0.1}}$

- Un coe_cient d'amortissement égal à : $\zeta = \dfrac{1}{\sqrt{6K}}$

Il est spécifié dans le cours que lorsqu'un système à retour unitaire possède un pôle nul (module intégrateur) dans la chaîne directe (système de classe l = 1), l'écart statique en régime permanent est nulle. Cela revient à dire que le gain statique est unitaire.

Nous imposons un amortissement égal à 0.52. En utilisant la relation (4), nous trouvons :

$$K = \frac{1}{6\zeta^2} = 0.6164$$

Le temps de réponse s'obtient en utilisant l'abaque $\omega_n t_r = f(\zeta)$.

Nous trouvons $\omega_n t_r = 5.25$

Avec la valeur K = 0.6164, nous trouvons $\omega_n = 9.61\, rd/s$.

Nous en déduisons donc que : $t_r = \dfrac{5.25}{9.61} = 0.546s$

Comme le gain statique est unitaire, nous en déduisons : $S_1 = FTBF(0) \times \mathrm{E} = 2\,rd$

Correcteur PI : $C(s) = K\left(\dfrac{T_i s + 1}{T_i s}\right)$

$$FTBO = \frac{15K(T_i s + 1)}{T_i s(1 + 0.1s)}$$

$$FTBF = \frac{15K(T_i s + 1)}{\dfrac{0.1T_i}{15K}s^3 + \dfrac{T_i}{15K}s^2 + T_i s + 1}$$

En utilisant le critère de Routh, nous obtenons le tableau suivant

$\frac{0.1T_i}{15K}$	T_i	0
$\frac{T_i}{15K}$	1	0
$T_i - 0.1$	0	0
1	0	0

Pour que tous les élements de la première colonne soient positifs, il faut et il suffit que :

$$T_i - 0.1 \geq 0 \Rightarrow T_i \geq 0.1$$

D'où le choix Ti = 0.1s n'est pas pertinant car le système sera **en limite de stabilité**.

Le correcteur PID a pour fonction de transfert :

$$C(s) = K\,\frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{T_1 s}$$

$$FTBO(s) = \frac{15K\,(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{(1+0.1s)T_1 s^2}$$

Nous calibrons T1 = 0.1s pour compenser le pôle du système. Ainsi,

$$FTBO(s) = \frac{15K\,(T_2 s+1)}{0.1 s^2}$$

La FTBF du système s'exprime alors sous la forme :

$$FTBF(s) = \frac{(T_2 s+1)}{\frac{0.1}{15K}s^2 + T_2 s + 1}$$

En utilisant le critère de Routh, nous obtenons le tableau suivant :

$\frac{0.1}{15K}$	1	0
T_2	0	0
1	0	0

Sous l'hypothèse de T2 > 0, tous les élements de la première colonne sont positifs, le système sera donc stable en boucle fermée.

Nous allons approcher cette FTBF par un second ordre en négligeant le zéro. Les paramètres du second ordre sont alors donnés par :

- Un gain statique unitaire
- Une pulsation propre égale à $\sqrt{\frac{15K}{0.1}}$
- Un amortissement égal à $\frac{T_2}{2}\sqrt{\frac{15K}{0.1}}$

Nous souhaitons un amortissement 0.52 et un temps de réponse de 0.5s.

En utilisant les abaques, nous en déduisons que :

$$\omega_n = 5.25/0.5 = 10.5\,rd\ /\ s\ .$$

En identifiant le dénominateur de la FTBF avec un second ordre, nous trouvons :

K=0.735 et T_2=0.099